
المملكة العربية السعودية
وزارة التربية والتعليم
الإدارة العامة للتربية والتعليم بمنطقة نجران
مكتب التربية والتعليم بمحافظة شرورة
الكتاب السنوي الخامس
نادي الرياضيات الورقي
1430/1429 هـ
جمع و إعداد
الاستاذ : طارق سلامة صابر
مشرف الرياضيات بمكتب التربية والتعليم بشرورة

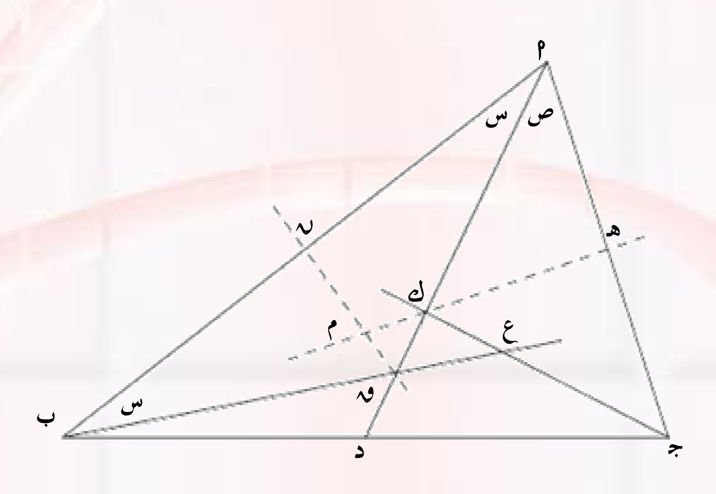
١

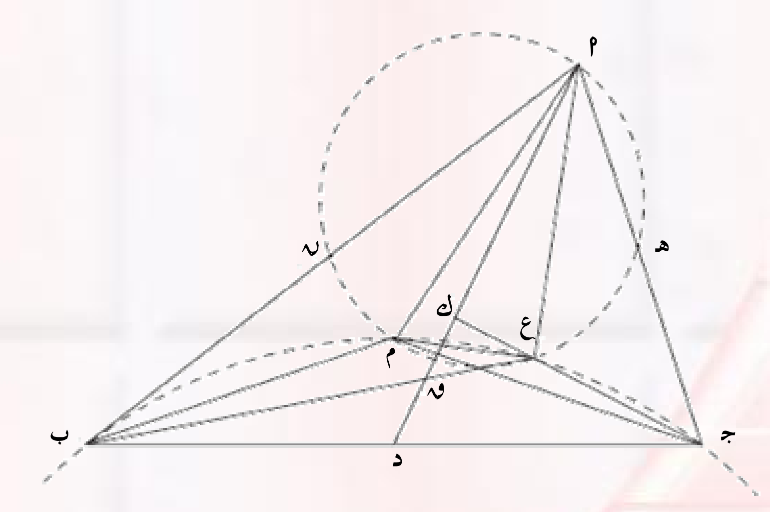
أ ب جـ مثلث حاد الزوايا ومختلف الأضلاع فيه أ ب > أ جـ .وفيه كذلك د ، هـ ، ن منتصفات أضلاعه ب جـ ، جـ أ ، أ ب على الترتيب ، المنصفان العموديان للضلعين أ ب ، أ جـ يقطعان أ د على الترتيب في و ، ك . إذا تقاطع ب و ، جـ ك في ع داخل Δ أ ب جـ . فاثبت أن : النقاط أ ، هـ ، ع ، ن تقع على محيط دائرة واحدة .

الاولمبياد الأمريكية رقم ٣٧ – اليوم الأول – ٢٩ابريل ٢٠٠٨م

٣٧ th United States of America Mathematical Olympiad

الحل





نفرض أن : م مركز Δ أ ب جـ

لكي نثبت أن النقاط أ ، هـ ، ع ، ن تقع على محيط دائرة واحدة

فإن علينا أن نثبت أن :

∠ أ ن م = ∠ أ هـ م = ∠ أ ع م = ٩٠° -------------------------(١)

وذلك لأنه في حالة :∠ ٩ ٮ م = ∠ ٩ هـ م

يوجد زاويتان متساويتان مرسومتان على قاعدة واحدة ٩ م وفي جهة واحدة منها

وذلك يؤدي إلى أن الشكل ٩ هـ ع م رباعي دائري أي أن النقاط ٩ ، هـ ، ع ، م تقع على محيط دائرة واحدة

أما في حالة :∠ ٩ ٮ م = ∠ ٩ ع م = ٩٠°

فذلك يعني أن هناك زاويتان متقابلتان متكاملتان في الرباعي ٩ ع م ٮ

وذلك يؤدي إلى أن الشكل ٩ ع م ٮ رباعي دائري أي أن النقاط ٩ ، ع ، م ، ٮ تقع على محيط دائرة

واحدة

ولكن :∠ ٩ ٮ م = ∠ ٩ هـ م = ٩٠° من معطيات المشكلة .

∴ المطلوب الآن إثباته هو أن :∠ ٩ ع م = ٩٠° .

في △ ٩ و ب ∵ ٮ و العمود المنصف للقاعدة

∴ ٩ و = ب و

وإذا فرضنا أن : ∠ ٩ ب و = س

∴∠ ٩ ب و = ∠ ب ٩ و = س

وبالمثل في △ ٩ ك جـ

∵ هـ ك العمود المنصف للقاعدة

∴ ٩ ك = جـ ك

و إذا فرضنا أن : ∠ ك ٩ جـ = ص

∴∠ ك ٩ جـ = ∠ ك جـ ٩ = ص

∴∠ ب ٩ جـ = س + ص

باستخدام قاعدة الجيب في △△ ٩ ب د ، ٩ جـ د

$$\therefore \frac{\text{ب د}}{\text{جا س}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا} \angle \text{ ب د أ}} \quad ، \quad \frac{\text{جـ د}}{\text{جا ص}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{جا} \angle \text{ جـ د أ}}$$

$$\therefore \text{جا} \angle \text{ ب د أ} = \frac{\text{أ ب جا س}}{\text{ب د}}$$

$$، \ \text{جا} \angle \text{ جـ د أ} = \frac{\text{أ جـ جا ص}}{\text{جـ د}}$$

$$\because \angle \text{ ب د أ} + \text{جـ د أ} = 180^\circ$$

$$\therefore \text{جا} \angle \text{ ب د أ} = \text{جا} \angle \text{ جـ د أ}$$

$$\therefore \frac{\text{أ ب جا س}}{\text{ب د}} = \frac{\text{أ جـ جا ص}}{\text{جـ د}}$$

$$\therefore \frac{\text{أ ب جا س}}{\text{أ جـ جا ص}} = \frac{\text{ب د}}{\text{جـ د}}$$

$$\because \text{ب د} = \text{جـ د}$$

$$\therefore \frac{\text{أ ب جا س}}{\text{أ جـ جا ص}} = 1$$

$$\therefore \frac{\text{جا س}}{\text{جا ص}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}} \quad \text{-----------------------------(٢)}$$

وبتطبيق قاعدة الجيب مرة أخرى على △ △ أ ع ب، أ جـ ع

$$\therefore \frac{\text{أ ع}}{\text{جا س}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا} \angle \text{ ب ع أ}} \quad ، \quad \frac{\text{أ ع}}{\text{جا ص}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{جا} \angle \text{ جـ ع أ}}$$

$$\therefore \frac{\text{جا س}}{\text{جا ص}} = \frac{\text{أ جـ جا} \angle \text{ ب ع أ}}{\text{أ ب جا} \angle \text{ جـ ع أ}} \quad \text{--------------------------------(٣)}$$

من (٢) ، (٣)

$$\therefore \frac{\text{أ جـ جا} \angle \text{ ب ع أ}}{\text{أ ب جا} \angle \text{ جـ ع أ}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}}$$

$$\therefore \text{جا} \angle \text{ ب ع أ} = \text{جا} \angle \text{ جـ ع أ} \quad \text{--------------------------------(٤)}$$

$\because \angle$ أ و ع خارجة عن △ أ و ب

$$\therefore \angle \text{ أ و ع} = 2\text{ س}$$

وبالمثل $\therefore \angle$ و ك ع $= 2$ ص

$$\therefore \angle \text{ ك ع و} = 180^\circ - 2\text{ س} - 2\text{ ص}$$

∴ ∠ك ع هـ = ١٨٠° - ٢ ∠ ب أ ج

∴ ∠ ب ع ج = ١٨٠° - (١٨٠° - ٢ ∠ ب أ ج) = ٢ ∠ ب أ ج

∵ ∠ أ م ج = ١٨٠° - ٢ ∠ ج أ م

، ∠ أ م ج = ١٨٠° - ٢ ∠ ب أ م

بالجمع

∠ أ م ج + ∠ أ م ج = ٣٦٠° - ٢ (∠ ج أ م + ∠ ب أ م)

= ٣٦٠° - ٢ (س + ص)

= ٣٦٠° - ٢∠ ب أ ج

∠ ج م ب = ٣٦٠° - (∠ أ م ج + ∠ أ م ج)

∠ ج م ب = ٣٦٠° - (٣٦٠° - ٢∠ ب أ ج)

∴ ∠ ج م ب = ∠ ب أ ج

∵ ∠ أ م ب = ١٨٠° - ٢ س ، ∠ أ م ج = ١٨٠° - ٢ ص

∴ ∠ ب م ج = ٣٦٠° - (١٨٠° - ٢ س + ١٨٠° - ٢ ص).

∴ ∠ ب م ج = ٢ س + ٢ ص = ٢ ∠ ب أ ج

∴ ∠ ب ع ج = ∠ ب م ج = ٢ ∠ ب أ ج

∴ الشكل ب م ع ج رباعي دائري تمر برؤوسه دائرة واحدة .

∴ ∠ ب ع م = ∠ ب ج م محيطيتان مرسومتان على قوس واحد ب⌒م

∵ Δ ب م ج متطابق الضلعين

∴ ∠ ب ج م = ∠ ج ب م

∴ ∠ ب م ج = ١٨٠° - ٢ ∠ ب ج م

ولكن ∠ ب م جـ = ٢∠ ب أ جـ

∴ ٢∠ ب أ جـ = ١٨٠° − ٢ ∠ ب جـ م   بالقسمة على ٢

∴ ∠ ب أ جـ = ٩٠° − ∠ ب جـ م

∴ ∠ ب جـ م =∠ ب ع م = ٩٠° − ∠ ب أ جـ ---------------------- (٥)

∵∠ ب ع أ + ∠ جـ ع أ = ٣٦٠° − ٢ ∠ ب أ جـ > ١٨٠°

من (٤)∠ ب ع أ = ∠ جـ ع أ

∴ ∠ ب ع أ = ∠ جـ ع أ = ١٨٠° − ∠ ب أ جـ --------------------- (٦)

∵∠ أ ع م = ∠ ب ع أ − ∠ ب ع م

من (٥) ، (٦)

∴∠ أ ع م = ١٨٠° − ∠ ب أ جـ − (٩٠° − ∠ ب أ جـ)

∴∠ أ ع م = ١٨٠° − ∠ ب أ جـ −٩٠° + ∠ ب أ جـ

∴∠ أ ع م = ٩٠° وهو المطلوب إثباته .



إذا كان : $٤^{س^{٢}} + ٢^{س^{٢}} = ٥٦$ فأوجد قيمة : $٢^{٢^{س^{٢}}}$

المسابقة العمومية لولاية الاباما الأمريكية – الدورة الأولى – ٢٩ مارس ٢٠٠٨ م

Alabama Statewide Mathematics Contest-First Round – March ٢٩-٢٠٠٨

الحل

نفرض أن : $٢^{س^{٢}} = ص$

$\therefore ٤^{ص} + ٢^{ص} = ٥٦$

$\therefore ٤^{ص} + ٢^{ص} - ٥٦ = ٠$

$\therefore ٢^{٢ص} + ٢^{ص} = ٥٦$

$\therefore (٢^{ص} - ٧)(٢^{ص} + ٨) = ٠$

$\therefore ٢^{ص} = ٧$ ، $٢^{ص} = -٨$ مرفوض

$\therefore ٢^{س^{٢}} = ٧$

$\therefore ٢^{٢^{س^{٢}}} = ٢^{٧} = ١٢٨$

٣

بفرض أن ⊙ عملية معرفة على الدوال د(س) ، هـ(س) بحيث أن :

د⊙ هـ(س) = د(هـ(س)) – هـ(د(س)) وإذا كانت د(س)= س^{٢} – ١ ، هـ(س) = ٢س + ١

فأوجد : د ⊙ هـ(س)

المسابقة العمومية لولاية الاباما الأمريكية – الدورة الأولى – ٢٩ مارس ٢٠٠٨ م

Alabama Statewide Mathematics Contest-First Round – March ٢٩-٢٠٠٨

الحل

د(هـ(س)) = د(٢ س + ١)

∵ د(س)= س^{٢} – ١

∴ د(هـ(س))= د(٢ س + ١)= (٢ س + ١)^{٢} – ١

∴ د(هـ(س))= ٤س^{٢} + ٤ س + ١ – ١ = ٤س^{٢} + ٤ س ---------------(١)

هـ(د(س)) = د(س^{٢} – ١)

∵ هـ(س) = ٢ س + ١

∴ هـ(د(س)) = هـ(س^{٢} – ١)= ٢ (س^{٢} – ١)+١

∴ هـ(د(س)) = ٢ س^{٢} – ٢+١

∴ هـ(د(س)) = ٢ س^{٢} – ١ --------------------------------- (٢)

من (١) ، (٢)

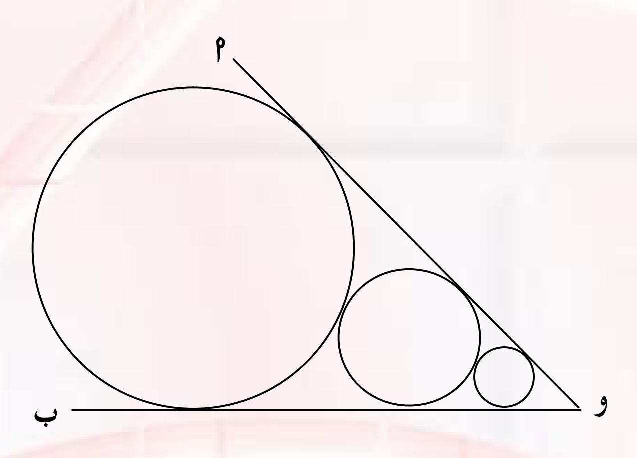
د ⊙ هـ(س) = د(هـ(س))– هـ(د(س))

د ⊙ هـ(س) = ٤س^{٢} + ٤ س – ٢ س^{٢} + ١

د ⊙ هـ(س) = ٢س^{٢} + ٤ س + ١

٤

على الشكل: ثلاث دوائر متماسة من الخارج ، يمساها المستقيمين وأ ، وب فإذا كانـت ∠ أوب = ٦٠° ، وطول نصف قطر الدائرة الصغرى يساوي ١ سم ، فأوجد طول نصف قطر الدائرة الكبرى .



مسابقة مدينتي بومونا ، ويسكنسون لاكتشاف الموهوبين – مجموعة المشكلات رقم ١ للعام الدراسي (٢٠٠٧ –٢٠٠٨م) – أكتوبر ٢٠٠٧م– الدورة الأولى .

Pomona -Wisconsin Mathematics Talent Search –Problem Set ١ (٢٠٠٧-٢٠٠٨)- October٢٠٠٧

الحل :

نلاحظ أنه في حالة دائرتين فقط من الممكن العمل بشكل عام كالتالي :– .

نفرض أن نصف قطر الدائرة الكبرى : س

، ونصف قطر الدائرة الصغرى : ص

نصل : $\overleftarrow{\text{م ن}}$ فيمر بالنقطة و ، ونرسم ن د ⊥ و ب ،

م جـ ، ن د ⊥ و ب ، ن ر ⊥ م جـ

∵ ∠ أوب = ٦٠°

، ∵ $\overleftarrow{\text{م و}}$ ينصف ∠ أوب

∴ ∠ م و جـ = ٣٠°

∴ ∠ م ن ر = ٣٠°

∴ في △ م ن ر القائم في ∠ ر : | م ن | = ٢ | م ر | ------------------(١)

∵ | م ن | = س + ص ------------------------------------ (٢)

، ∵ الشكل ن د جـ ر مستطيل

∴ ن د = ر جـ = ص

∴ | م ر | = س - ص ------------------------------------ (٣)

∴ من (١) ، (٢) ، (٣)

س + ص = ٢ (س - ص)

س + ص = ٢ س - ٢ ص

∴ س = ٣ ص

أي أن العلاقة العامة بين نصفي قطري دائرتين بالشروط السابقة هي :نصف قطر الدائرة الكبرى = ٣ أمثال نصف قطر الدائرة الكبرى .

وبالعودة للمشكلة التي نحن بصددها نجد أن :

نصف قطر الدائرة الصغرى = ١ سم

∴ نصف قطر الدائرة الوسطى = ٣ × ١ = ٣ سم

وعليه نصف قطر الدائرة الكبرى = ٣ × ٣ = ٩ سم

إذا كانت : س ، ص ، ع ∋ ح بحيث : $٠ \leqslant$ س $\leqslant ١$ ، $٠ \leqslant$ ص $\leqslant ١$ ، $٠ \leqslant$ ع $\leqslant ١$

، س + ص + ع = ٢ فاثبت أن :

$$١ \le \frac{ع}{ع+١} + \frac{ص}{ص+١} + \frac{س}{س+١} \le ٢$$

٥

مسابقة مدينتي بومونا ، ويسكنسون لاكتشاف الموهوبين – مجموعة المشكلات رقم ١ للعام الدراسي (٢٠٠٧–٢٠٠٨م) – أكتوبر ٢٠٠٧م– المجموعة الأولى .

Pomona -Wisconsin Mathematics Talent Search –Problem Set ١ (٢٠٠٧-٢٠٠٨)- October٢٠٠٧

الحل

∵ $٠ \leqslant$ س $\leqslant ١$

∴ $١ \leqslant$ س + ١ $\leqslant ٢$

∴ $١ \le \frac{١}{س+١} \le \frac{١}{٢}$

∵ س $\geqslant ٠$

∴ س $\le \frac{س}{س+١} \le \frac{١}{٢}$س ------------------------------(١)

بالمثل :

∴ ص $\le \frac{ص}{ص+١} \le \frac{١}{٢}$ص ------------------------------(٢)

∴ ع $\le \frac{ع}{ع+١} \le \frac{١}{٢}$ع ------------------------------(٣)

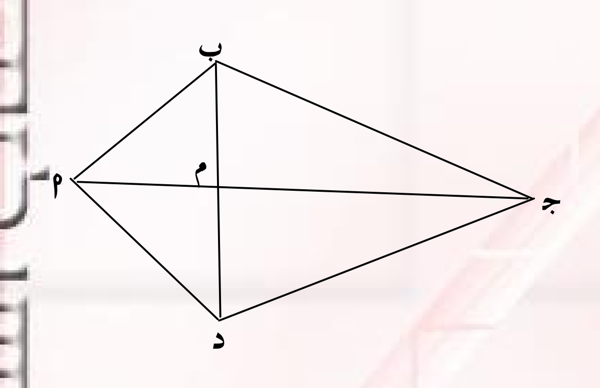
بجمع (١) ، (٢) ، (٣)

∴ س + ص + ع $\geqslant \frac{س}{س+١} + \frac{ص}{ص+١} + \frac{ع}{ع+١}$

٦

على الشكل : أ ب جـ د شكل رباعي يتقاطع قطراه في النقطة م ، إذا كانت مساحة سطح △ أ ب د = وحدة مربعة واحدة ، ومساحة سطح △ ب جـ أ = ٢ وحدة مربعة ، ومساحة سطح △ د أ جـ = ٣ وحدة مربعة .

فأوجد مساحة سطحي: △ جـ د ب، △ أ ب م .



مسابقة مدينتي بومونا ، ويسكنسون لاكتشاف الموهوبين – مجموعة المشكلات رقم ١ للعام الدراسي (٢٠٠٧–٢٠٠٨م) – نوفمبر ٢٠٠٧م– المجموعة الثانية .

Pomona -Wisconsin Mathematics Talent Search –Problem Set٢ (٢٠٠٧-٢٠٠٨)- November ٢٠٠٧



نفرض أن مساحة سطح △ أ م ب = س

، ∵ △ أ ب د = وحدة مربعة واحدة

∴ مساحة سطح △ أ م د = ١ – س

، ∵ مساحة سطح △ ب جـ أ = ٢ وحدة مربعة

∴ مساحة سطح △ ب م جـ = ٢ – س

، ∵ مساحة سطح △ د أ جـ = ٣ وحدة مربعة

∴ مساحة سطح △ م جـ د = ٣ – (١ – س) = ٢ + س .

∴ مساحة سطح △ ب جـ د = ٢ – س + ٢ + س = ٤ وحدة مربعة المطلوب أولاً

∵ △ △ أ ب م ، جـ ب م في جهة واحدة من القاعدة و يشتركان في ارتفاع واحد

∴ النسبة بينهما = النسبة بين طولي قاعدتيهما (أ م ، جـ م) .

وبالمثل : ∵ △ △ أ د م ، جـ د م في جهة واحدة من القاعدة و يشتركان في ارتفاع واحد

∴ النسبة بينهما = النسبة بين طولي قاعدتيهما (أ م ، جـ م) .

$$\therefore \frac{\text{س}}{\text{٢} - \text{س}} = \frac{\text{١} - \text{س}}{\text{٢} + \text{س}}$$

∴ س (٢ + س) = (٢ – س) (١ – س)

∴ ٢ س + س^{٢} = ٢ – ٣ س + س^{٢}

∴ ٢ س = ٢ – ٣ س

∴ ٥ س = ٢

∴ س = $\frac{٢}{٥}$ ∴ مساحة سطح △ أ ب م = $\frac{٢}{٥}$ وحدة مربعة .

٧

على الشكل : ٩ ب جـ مثلث ، رسمنـا س ص // ب جـ
ويمر بالرأس ٩ ، إذا كان : س جـ ∩ ٩ ب = {د} ،
ص ب ∩ ٩ جـ = {هـ} ، ٩ س = ٩ ص ،
ب هـ = جـ د فاثبت أن : ٩ب = ٩جـ

مسابقة مدينتي بومونا ، ويسكنسون لاكتشاف الموهوبين – مجموعة المشكلات رقم ١ للعام الدراسي (٢٠٠٧–٢٠٠٨م) – ديسمبر ٢٠٠٧م– المجموعة الثالثة.

Pomona -Wisconsin Mathematics Talent Search –Problem Set ٣ (٢٠٠٧-٢٠٠٨)-December ٢٠٠٧

الحل

∵ س ص // ب جـ
∴ ∠ ٩ ص هـ = ∠ جـ ب هـ ، ∠ ص ٩ هـ = ∠ هـ جـ ب
∴ △ ٩ ص هـ يشابه △ جـ ب هـ

∴ $\frac{٩\ ص}{ب\ جـ} = \frac{ص\ هـ}{ب\ هـ}$

بالمثل : △ ٩ س د يشابه △ ب جـ د

∴ $\frac{٩\ س}{ب\ جـ} = \frac{س\ د}{د\ جـ}$

∵ ٩ س = ٩ ص ، ب هـ = جـ د
∴ ص هـ = س د
∴ ب ص = ب هـ + هـ ص = جـ د + د س = س جـ
و الآن لنقيم من ب ، جـ عمودان يقطعان س ص في ك ، ى
، ∵ س ص // ب جـ ∴ جـ ى = ب ك
∴ △ △ القائما الزاوية س ى جـ ، ص ك ب يتطابقان وينتج أن : ∠ س = ∠ ص
ولكن : ٩ س = ٩ ص ، ص هـ = س د
∴ △ △ س ٩ د ، ص ٩ هـ يتشابهان
∴ ∠ ص ٩ هـ = ∠ س ٩ د
∵ ∠ س ٩ د = ∠ د ب جـ ، ∠ ص ٩ جـ = ∠ هـ جـ ب بالتبادل
∴ ∠ هـ جـ ب = ∠ د ب جـ
∴ △ ٩ ب جـ متطابق الضلعين ∴ ٩ب = ٩جـ

٨ إذا كانت: س ، ص أعداد حقيقية موجبة تحقق المعادلتين $س^٢ + ص^٢ = ١$ ، $س^٤ + ص^٤ = \frac{١٧}{١٨}$

فأوجد س ص

المسابقة الحادية عشر لمعهد هارفارد للرياضيات – ٢٣ فبراير ٢٠٠٨

11th Annual Harvard-Mit Mathematics Tournament

الحل

$\because (س^٢ + ص^٢)^٢ = س^٤ + ص^٤ + ٢ س^٢ ص^٢ =$

$\because س^٢ + ص^٢ = ١$

، $\because س^٤ + ص^٤ = \frac{١٧}{١٨}$

$\therefore ١ = \frac{١٧}{١٨} + ٢ س^٢ ص^٢$

$\therefore ٢ س^٢ ص^٢ = ١ - \frac{١٧}{١٨}$

$\therefore ٢ س^٢ ص^٢ = \frac{١}{١٨}$

$\therefore س^٢ ص^٢ = \frac{١}{٣٦}$

$\therefore س ص = \frac{١}{٦}$

٩

على الشكل : ٩ ب ج مثلث قائم في زاوية ٩ ، رسمت الدائرة (م ، نو) تمس أضلاعه ٩ ب ، ٩ ج من الداخل في س ، ص . ثم رسم من س ، ص قطري الدائرة س هـ ، ص د . فإذا كان | ٩ ب |=٦سم فأوجد مساحة الجزء المظلل الواقع خارج المثلث من الدائرة .

المسابقة الحادية عشر لمعهد هارفارد للرياضيات – ٢٣ فبراير ٢٠٠٨

١١th Annual Harvard-Mit Mathematics Tournament

الحل

∵ م مركز الدائرة

∴ م د = م هـ = نو

∵ ∠ ٩ = ٩٠° ، ∠ م س ٩ ، ∠ م ص ٩ قائمتان (نصف قطر ⊥ مماس)

∴ ∠ س م ص = ∠ د م هـ = ٩٠°

∴ ص د // ٩ ب ، هـ س // ٩ ج

∴ Δ م د هـ يشابه Δ ٩ ب ج

ولكن م د = م هـ

∴ ٩ ب = ٩ ج

نفرض أن : دَ مسقط د على ٩ ب

∴ Δ د دَ ب يشابه Δ ج ٩ ب

∵ د دَ = نو ، ٩ ب = ٩ ج

∴ دَ ب = نو

∴ ٩ ب = ٣ نو

∵ ٩ ب = ٦ سم

∴ نوهـ = ٢ سم

∵ مساحة الجزء المظلل = مساحة $\frac{1}{4}$ الدائرة – مساحة $\triangle$ م د هـ

∴ مساحة الجزء المظلل = $\frac{1}{4}$ × ط × ٤ – $\frac{1}{2}$ × ٢ × ٢

∴ مساحة الجزء المظلل = ط – ٢ سم^{٢}

١٠

نستطيع كتابة الكسر التالي : $\frac{٢}{\frac{٢}{\frac{٢}{\frac{٢}{٢+١}+١}+١}+١+\frac{٢}{١+\frac{٢}{١+\frac{٢}{١+٢}}}}$ على الصورة : $\frac{س}{ص}$

أوجد: ٢س + ص حيث س ، ص أعداد حقيقية موجبة

لقاء المدارس المتوسطة والثانوية لمدينة ويسكنسون الأمريكية برعاية جامعة وايت ووتر – ابريل ٢٠٠٨م

University of Wisconsin –Whitewater Middle/High School Math Meet –April ٢٠٠٨

الحل

$$\frac{٢}{\frac{٢}{\frac{٢}{\frac{٢}{٢+١}+١}+١}+١+\frac{٢}{١+\frac{٢}{١+\frac{٢}{١+٢}}}} = \frac{٢}{\frac{٢}{\frac{٢}{\frac{٢}{٣}+١}+١}+١+\frac{٢}{١+\frac{٢}{١+\frac{٢}{٣}}}} = \frac{٢}{\frac{٢}{\frac{٢}{\frac{٥}{٣}}+١}+١+\frac{٢}{١+\frac{٢}{\frac{٥}{٣}}}} =$$

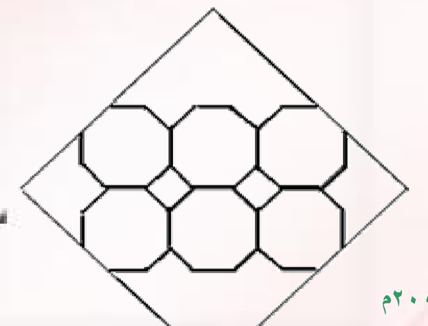
$$\frac{٢}{\frac{٢}{\frac{٦}{٥}+١}+١+\frac{٢}{١+\frac{٦}{٥}}}$$

$$= \frac{٢}{\frac{٢}{\frac{١١}{٥}}+١+\frac{٢}{\frac{١١}{٥}}} = \frac{٢}{\frac{١٠}{١١}+١+\frac{١٠}{١١}} = \frac{٢}{\frac{١٠}{١١}+\frac{١١}{١١}+\frac{١٠}{١١}} = \frac{٢}{\frac{٣١}{١١}} = \frac{٢٢}{٣١} = \frac{س}{ص}$$

∴ ٢س + ص = ٢ × ٢٢ + ٣١ = ٧٥

١١

على الشكل : ستة ثمانيات منتظمة ومتطابقة طول ضلع كل منها ٢ سم رسمت داخل مربع مساحته على الصورة : س +√٢ ص حيث س ، ص أعداد حقيقية موجبة . أوجد : س + ص .



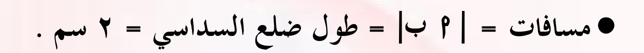
لقاء المدارس الثانوية لمدينة ويسكنسون الأمريكية برعاية جامعة وايت ووتر – ابريل ٢٠٠٨م

University of Wisconsin –Whitewater High School Math Meet –April ٢٠٠٨

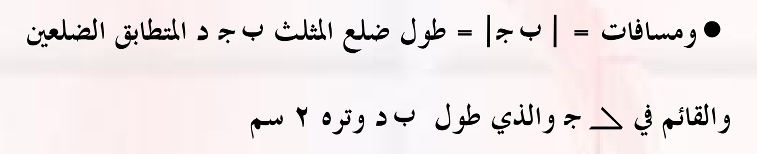
الحل

نرسم مستقيمات توازي أحد أضلاع المربع وتمر برؤوس السداسيات كما بالشكل .

نلاحظ أن المسافات بين المستقيمات المتوازية تنقسم لفئتين



● مسافات = | م ب| = طول ضلع السداسي = ٢ سم .



● ومسافات = | ب جـ| = طول ضلع المثلث ب جـ د المتطابق الضلعين والقائم في ∠ جـ والذي طول ب د وتره ٢ سم

∴ | ب جـ| = √٢ سم

∴ طول ضلع المربع = ٤ . | م ب| + ٥ . | ب جـ|

∴ طول ضلع المربع = ٤×٢ + ٥ × √٢

∴ طول ضلع المربع = ٨ + ٥ √٢ سم

∴ مساحة المربع = (٨ + ٥ √٢)٢ سم٢

∴ مساحة المربع = ٦٤ + ٨٠ √٢ + ٥٠

∴ مساحة المربع = ١١٤ + ٨٠ √٢

∴ س +√٢ ص = ١١٤ + ٨٠ √٢

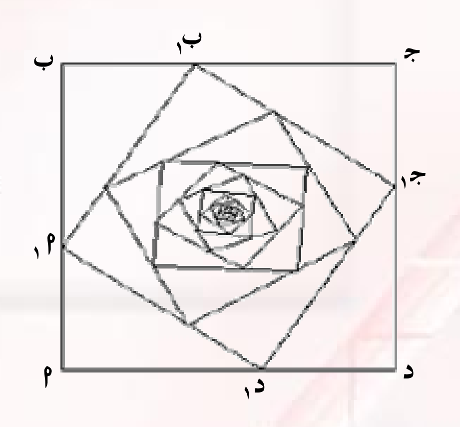
∴ س = ١١٤ ، ص = ٨٠

∴ س + ص = ١١٤ + ٨٠

∴ س + ص = ١٩٤

١٢

على الشكل : ٢ ب جـ د مربع طول ضلعه ٧ سم ، أخذت النقاط ٢١ ، ب١ ، جـ١، د١ على $\overleftarrow{٢ب}$ ، $\overleftarrow{بجـ}$ ، $\overleftarrow{جـد}$ ، $\overleftarrow{د٢}$ على الترتيب ، و تقع كل منها على بُعد ٣سم من بداية الشعاع، وهكذا يكون الشكل ٢١ ب١ جـ١ د١ مربعاً وبالمثل إذا رسمنا الشكل ٢٢ ب٢ جـ٢ د٢ يكون مربعاً ، وهكذا حتى الشكل ٢ن بن جـن دن حيث ن (عدد المربعات المرسومة داخل الأصلي . أوجد محيط جميع المربعات المرسومة حتى ن ∋ ص



لقاء المدارس الثانوية لمدينة ويسكنسون الأمريكية برعاية جامعة وايت ووتر – ابريل ٢٠٠٨م

University of Wisconsin –Whitewater High School Math Meet –April ٢٠٠٨

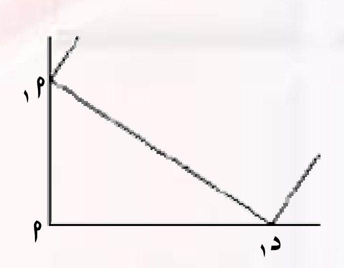
الحل

∵ |٢ د١| = ٧ – ٣ = ٤ سم

، ∵ |٢ ٢١| = ٧ – ٤ = ٣ سم

، ∵ ∆ د١ ٢ ٢١ قائم في ٢

∴ من نظرية فيثاغورس |٢١ د١| = $\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}$ = ٥ سم



∴ طول ضلع المربع ٢١ب١ جـ١ د١ = $\frac{٥}{٧}$ من طول المربع ٢ ب جـ د

وبالمثل طول كل ضلع من أضلاع أي مربع = $\frac{٥}{٧}$ من طول المربع الخارج عنه

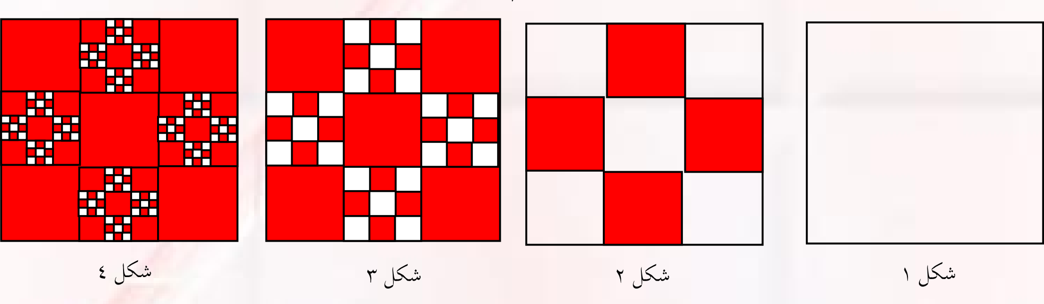
∴ محيط المربع ٢ ب جـ د = ٤ × ٧ = ٢٨ سم

∴ مجموع أطوال محيطات المربعات = ٢٨ × $\left[١ + \frac{٥}{٧} + \left(\frac{٥}{٧}\right)^٢ + \left(\frac{٥}{٧}\right)^٣ + \left(\frac{٥}{٧}\right)^٤ + ...\right]$

وهو مجموع متسلسلة هندسية = $\frac{٢٨}{١ - \frac{٥}{٧}} = \frac{٢٨}{\frac{٧ - ٥}{٧}} = \frac{٢٨}{\frac{٢}{٧}} = \frac{٢٨ \times ٧}{٢} = ٩٨$

١٣

على الشكل : مساحة المربع على الشكل ١ تساوي وحدة مربعة واحدة ، تم تقسيم المربع في الشكل ٢ إلى تسع مربعات متماثلة ، وتم اعتبار الشكل ٢ وحدة تقسيم للمربع في الشكل ٣ ، وهكـــذا .
أوجد المساحة الغير مظلله في الشكل ذو الترتيب رقم ١٠.


شكل ١ شكل ٢ شكل ٣ شكل ٤

مسابقة الرياضيات للمدارس الثانوية بهونج كونج ٢٠٠٣ – ٢٠٠٤
The Hong Kong Mathematical Constant ٢٠٠٣-٢٠٠٤



∵ المساحة الغير مظللة بالشكل ٢ = $\frac{5}{9}$

، ∵ المساحة الغير مظللة بالشكل٣ = $\left(\frac{5}{9}\right)^{2}$

∴ المساحة الغير مظللة بالشكل ١٠ = $\left(\frac{5}{9}\right)^{10}$

١٤

إذا كان : $١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + \ldots\ldots + ١٥^٣ = ١٤٤٠٠$.

فأوجد ناتج : $٢^٣ + ٤^٣ + ٦^٣ + \ldots\ldots + ٣٠^٣$

مسابقة الرياضيات للمدارس الثانوية بهونج كونج ٢٠٠٣ – ٢٠٠٤

The Hong Kong Mathematical Constant ٢٠٠٣-٢٠٠٤

الحل

$\because$ $٢^٣ + ٤^٣ + ٦^٣ + \ldots + ٣٠^٣ = (٢ \times ١)^٣ + (٢ \times ٢)^٣ + (٢ \times ٣)^٣ + \ldots + (٢ \times ١٥)^٣$

$\therefore$ $٢^٣ + ٤^٣ + ٦^٣ + \ldots + ٣٠^٣ = ٢^٣ \times ١^٣ + ٢^٣ \times ٢^٣ + ٢^٣ \times ٣^٣ + \ldots + ٢^٣ \times ١٥^٣$

$\therefore$ $٢^٣ + ٤^٣ + ٦^٣ + \ldots + ٣٠^٣ = ٢^٣ (١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + \ldots + ١٥^٣)$

ولكن : $١^٣ + ٢^٣ + ٣^٣ + \ldots + ١٥^٣ = ١٤٤٠٠$

$\therefore$ $٢^٣ + ٤^٣ + ٦^٣ + \ldots + ٣٠^٣ = ٢^٣ \times ١٤٤٠٠$

$\therefore$ $٢^٣ + ٤^٣ + ٦^٣ + \ldots + ٣٠^٣ = ٨ \times ١٤٤٠٠$

$\therefore$ $٢^٣ + ٤^٣ + ٦^٣ + \ldots + ٣٠^٣ = ١١٥٢٠٠$

١٥	احسب عدد أقطار المضلع ذو العشرة أضلاع .

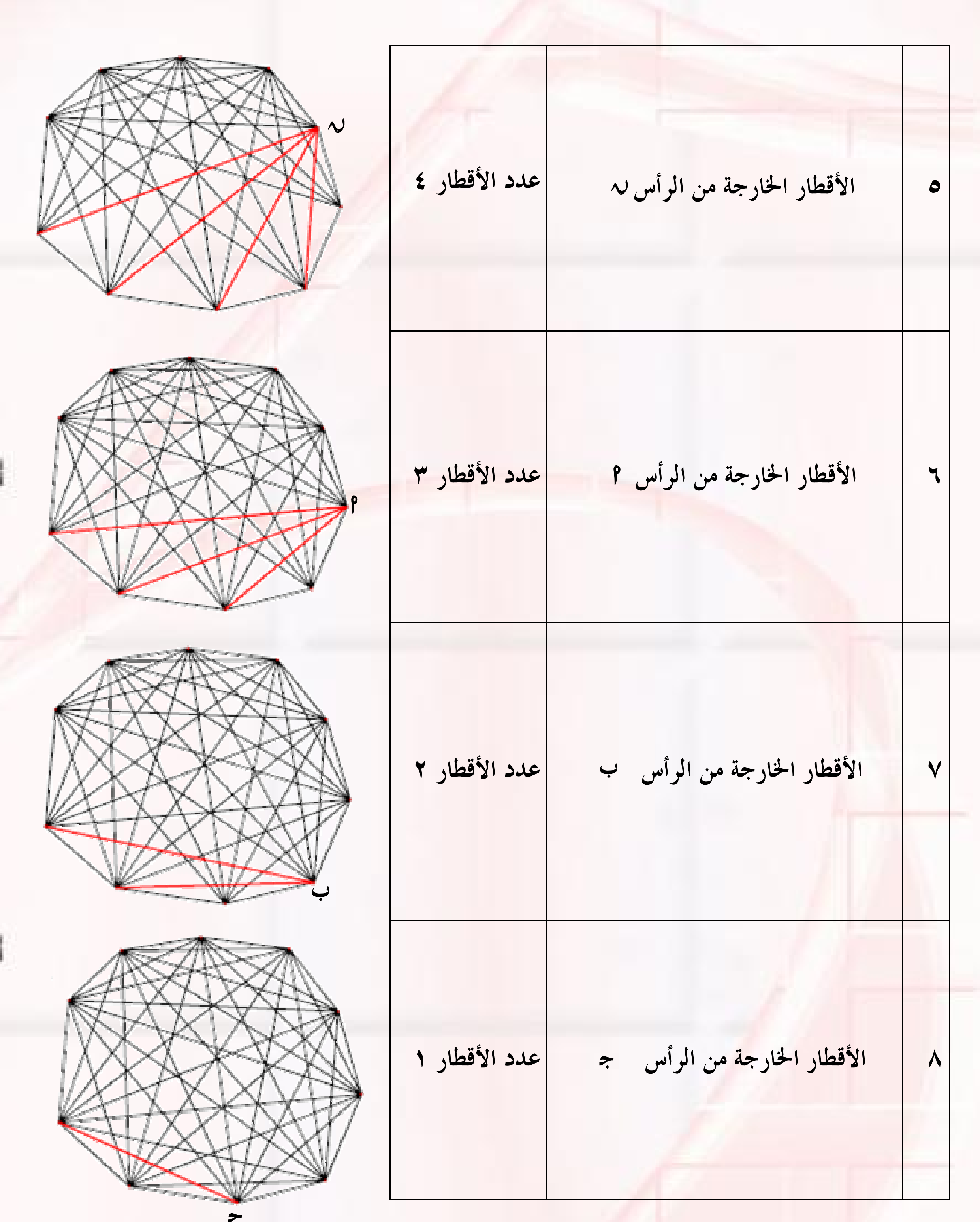
مسابقة جامعة هيوستن الأمريكية لطلاب المدارس الثانوية – مسابقة الهندسة – ٢٠٠٥

University of Houston High School Mathematics Constant-Geometry Exam -٢٠٠٥



سنقوم بحساب عدد الأقطار عن طريق الرسم من كل رأس كما يلي

١	الأقطار الخارجة من الرأس ح	عدد الأقطار ٧
٢	الأقطار الخارجة من الرأس ك	عدد الأقطار ٧
٣	الأقطار الخارجة من الرأس م	عدد الأقطار ٦
٤	الأقطار الخارجة من الرأس ى	عدد الأقطار ٥



٥	الأقطار الخارجة من الرأس هـ	عدد الأقطار ٤
٦	الأقطار الخارجة من الرأس أ	عدد الأقطار ٣
٧	الأقطار الخارجة من الرأس ب	عدد الأقطار ٢
٨	الأقطار الخارجة من الرأس جـ	عدد الأقطار ١

∴ مجموع الأقطار = ٧ + ٧ + ٦ + ٥ + ٤ + ٣ + ٢ + ١ = ٣٥ قطر

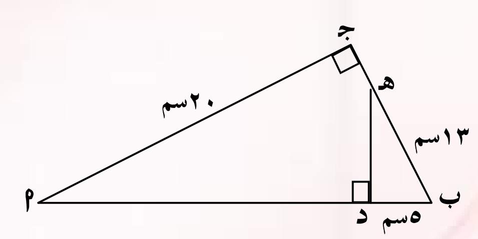
ملاحظة

يمكن استخدام القانون التالي في إيجاد عدد الأقطار:–

عدد أقطار المضلع = $\frac{ن(ن - ٣)}{٢}$ = $\frac{١٠(١٠ - ٣)}{٢}$ = $\frac{١٠ \times ٧}{٢}$ = ٣٥ قطر

١٦

على الشكل : ؟ ب جـ مثلث قائم الزاوية في جـ ، هـ ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ ،
هـ د ⊥ ؟ ب .إذا كان | ؟ جـ | = ٢٠ سم ، | ب هـ | = ١٣ ،
| ب د | = ٥ سم ،فأوجد | ؟ د |



مسابقة جامعة هيوستن الأمريكية لطلاب المدارس الثانوية – مسابقة الهندسة – ٢٠٠٥

University of Houston High School Mathematics Constant-Geometry Exam -٢٠٠٥

الحل

في Δ هـ ب د القائم في ∠ د

∵ | ب هـ | = ١٣ ، | ب د | = ٥ سم

∴ باستخدام نظرية فيثاغورس | هـ د | = ١٢ سم

∴ جا ب = $\frac{١٢}{١٣}$ -------------------------------------١

في Δ ؟ ب جـ القائم في ∠ جـ

نفرض أن | ؟ د | = س

جا ب = $\frac{٢٠}{س + ٥}$ -------------------------------------٢

∴ من (١) ، (٢)

$\frac{٢٠}{س + ٥} = \frac{١٢}{١٣}$

∴ ١٢ س + ٦٠ = ٢٦٠

∴ ١٢ س = ٢٠٠

∴ س = $\frac{٥٠}{٣}$ سم

١٧

إذا كانت : أ_1 ، أ_2 ، أ_3 ،...... متسلسلة من الأعداد الموجبة فيها كل حد ينتج من قسمته (بعد إضافة واحد صحيح) على الحد الذي يسبقه (أي على سبيل المثال المتسلسلة : ٢ ، ٥ ، ٣ ، $\frac{4}{5}$ ، $\frac{3}{5}$ ، ٢ ، ٥ ، ٣ ، .... تحقق الشرط السابق) . اثبت أن أي متسلسلة لها نفس ذات الشرط تعود إلى حدها الأول بعد ٥ حدود .

المسابقة رقم ٢٤ – لمعهد W.J.Bloundon برعاية جامعة نيوفاوندلاند – الولايات المتحدة – ٢٠ فبراير ٢٠٠٧

Mathematics Constant Sponsored by University of Newfoundland-٢٠February ٢٠٠٧

٢٤ th W.J.Bloundon

الحل

نفرض أن العددين الأول والثاني من المتسلسلة : $\text{أ}_1 = \text{س}$ ، $\text{أ}_2 = \text{ص}$

$$\therefore \text{أ}_3 = \frac{\text{ص}+1}{\text{س}}$$

$$\text{أ}_4 = \frac{1+\frac{\text{ص}+1}{\text{س}}}{\text{ص}} = \frac{\text{س}+\text{ص}+1}{\text{س}\times\text{ص}}$$

$$\text{أ}_5 = \frac{1+\frac{\text{س}+\text{ص}+1}{\text{س}\times\text{ص}}}{\frac{\text{ص}+1}{\text{س}}} = \frac{\frac{\text{س}\times\text{ص}+\text{س}+\text{ص}+1}{\text{س}\times\text{ص}}}{\frac{\text{ص}+1}{\text{س}}} = \frac{\text{س}(\text{ص}+1)+(\text{ص}+1)}{\text{س}\times\text{ص}}\times\frac{\text{س}}{\text{ص}+1}$$

$$= \frac{(\text{ص}+1)(\text{س}+1)}{\text{س}\times\text{ص}}\times\frac{\text{س}}{\text{ص}+1} = \frac{\text{س}+1}{\text{ص}}$$

$$\text{أ}_6 = \frac{1+\frac{\text{س}+1}{\text{ص}}}{\frac{\text{س}+\text{ص}+1}{\text{س}\times\text{ص}}} = \frac{\frac{\text{س}+\text{ص}+1}{\text{ص}}}{\frac{\text{س}+\text{ص}+1}{\text{س}\times\text{ص}}} = \frac{\text{س}+\text{ص}+1}{\text{ص}}\times\frac{\text{س}\times\text{ص}}{\text{س}+\text{ص}+1} = \text{س} = \text{أ}_1$$

١٨

أوجد مجموعة حل المعادلتين : س + ص = ٢ ، $\frac{س^2}{ص} + \frac{ص^2}{س} = \frac{14}{3}$ حيث س ، ص ∋ ح

المسابقة رقم ٢٤ – لمعهد W.J.Bloundon برعاية جامعة نيوفاوندلاند – الولايات المتحدة – ٢٠ فبراير ٢٠٠٧

Mathematics Constant Sponsored by University of Newfoundland-٢٠February ٢٠٠٧

٢٤ th W.J.Bloundon

الحل

∵ $\frac{س^2}{ص} + \frac{ص^2}{س} = \frac{14}{3}$

∴ $\frac{س^3 + ص^3}{س \times ص} = \frac{14}{3}$

∴ $\frac{(س + ص)(س^2 - س \times ص + ص^2)}{س \times ص} = \frac{14}{3}$

∵ س + ص = ٢

∴ $\frac{2 \times (س^2 - س \times ص + ص^2)}{س \times ص} = \frac{14}{3}$

∴ $\frac{س^2 - س \times ص + ص^2}{س \times ص} = \frac{7}{3}$

∴ ٣س^2 – ٣س ص + ٣ص^2 = ٧س ص

∴ ٣س^2 – ١٠س ص + ٣ص^2 = ٠

∴ (٣س – ص)(س – ٣ص) = ٠

∴ ٣س = ص ومنها س = $\frac{1}{3}$ ص

أو س = ٣ ص

ولكن س + ص = ٢

∴ $\frac{1}{3}$ص + ص = ٢ ومنها ص = $\frac{3}{2}$ ، س = $\frac{1}{2}$

، ٣ص + ص = ٢ ومنها ص = $\frac{1}{2}$ ، س = $\frac{3}{2}$

∴ مجموعة الحل = $\{(\frac{1}{2} ، \frac{3}{2}) ، (\frac{3}{2} ، \frac{1}{2})\}$

١٩ حل إن أمكن المعادلة :

$(س^{٢} - ٥ س + ٧)^{س^{٢} - ٨ س + ٢٠} = ١$ حيث : $س^{٢} - ٥ س + ٧ > ٠$ لكل $س \in ح$

الاولمبياد الوطني لإمارة رأس الخيمة – دولة الإمارات العربية– ٢٠٠٨/٣/١٧هـ

الحل

$\because (س^{٢} - ٥ س + ٧)^{س^{٢} - ٨ س + ٢٠} = ١$

$\therefore س^{٢} - ٨ س + ٢٠ =$ صفر

باستخدام القانون العام لحل المعادلة من الدرجة الثانية

$س = (٨ \pm \sqrt{-١٦}) \div ٢$

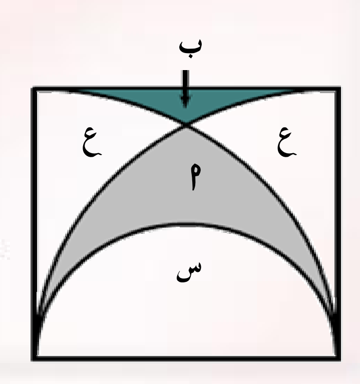
$س = (٨ \pm ٤\sqrt{-١}) \div ٢$

$س = (٨ \pm ٤ ت) \div ٢$

$س = ٤ \pm ٢ ت$

٢٠ على الشكل : نصف دائرة ، وربعي دائرتين متطابقتين مرسومة جميعاً داخل مربع طول ضلعه٢ سم

أوجد الفرق بين المساحة المظللة ٩ ، المساحة المظللة الأخرى ب



مسابقة الاولمبياد للمرحلة الثانوية – جنوب أفريقيا – التصفية الأولى – ١٨ مارس ٢٠٠٨

South African Mathematics Olympiad – Grades ١٠،١١ and ١٢ – ١٨ March ٢٠٠٨

الحل :

نفرض أن مساحة نصف الدائرة = س

، مساحة ربع الدائرة = ص

∵ طول ضلع المربع (قطر نصف الدائرة) = ٢ سم

∴ مساحة نصف الدائرة س = $\frac{١}{٢}$ ط (١)^{٢} = $\frac{١}{٢}$ ط سم^{٢}

∵ نصف قطر ربع الدائرة = طول ضلع المربع = ٢

∴ مساحة ربع الدائرة ص = $\frac{١}{٤}$ ط (٢)^{٢} = ط سم^{٢}

بفرض أن المنطقة غير المظللة بين ٩ ، ب هي ع

∴ س + ٩ + ع = ط ومنها ٩ = ط – س – ع

، ب + ع + ص = ٤ ومنها ب = ٤ – ع – ص

∴ ٩ – ب = ط – س – ع – ٤ + ع + ص

= ط – $\frac{١}{٢}$ ط – ٤ + ط

= $\frac{٣}{٢}$ ط – ٤ سم^{٢}

٢١

على الشكل المجاور : ∠ أ + ∠ ب + ∠ ج + ∠ د + ∠ هـ + ∠ و + ∠ ل = س × ٩٠°

أوجد قيمة س

مسابقة الاولمبياد للصفوف الثامن والتاسع – جنوب أفريقيا – التصفية الأولى – ١٢سبتمبر٢٠٠٥

South African Mathematics Olympiad – Grades ٨ and ٩ – ١٢ September ٢٠٠٥

الحل

نفرض أن : ب هـ ∩ أ ج = {ع} ، و د ∩ ب هـ = {ك}

، ∠ أ ع هـ = ١ ، ∠ و ك ع = ٢

في △ أ ع هـ : ∠ أ + ∠ هـ + ∠ ١ = ١٨٠°

في الرباعي ل و ك ب : ∠ ل + ∠ ٢ + ∠ و + ∠ ب = ٣٦٠°

بالجمع

∴ ∠ أ + ∠ ب + ∠ هـ + ∠ و + ∠ ل + ∠ ١ + ∠ ٢ = ١٨٠° + ٣٦٠°

∴ ∠ أ + ∠ ب + ∠ هـ + ∠ و + ∠ ل + ∠ ١ + ∠ ٢ = (٢×٩٠°) + (٤×٩٠°)

∴ ∠ أ + ∠ ب + ∠ هـ + ∠ و + ∠ ل + ∠ ١ + ∠ ٢ = (٢ + ٤)٩٠°

∴ ∠ أ + ∠ ب + ∠ هـ + ∠ و + ∠ ل + ∠ ١ + ∠ ٢ = ٦ ×٩٠°

∵ ∠ ١ + ∠ ٣ = ١٨٠°

، ∵ ∠ ٢ + ∠ ٤ = ١٨٠°

، ∵ ∠ ٣ + ∠ ٤ + ∠ ج + ∠ د = ٣٦٠°

∴ ٣٦٠° − ∠ ١ − ∠ ٢ + ∠ ج + ∠ د = ٣٦٠°

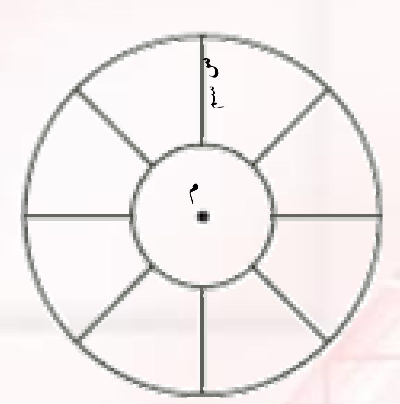
∴ ∠ ١ + ∠ ٢ = ∠ ج + ∠ د

∴ ∠ أ + ∠ ب + ∠ ج + ∠ د + ∠ هـ + ∠ و + ∠ ل = ٦× ٩٠°

∴ س = ٦

٢٢

الشكل المجاور يمثل نافذة زجاجية مكونة من ٩ أجزاء متساوية المساحة إذا كان الجزء الأوسط يمثل دائرة نصف قطرها ٢٠ سم ومركزها م ، وفواصل الأجزاء الأخرى المتساوية عند امتدادها جميعاً بمركز هذه الدائرة، وإذا كان طول الفاصل الواحد س .
فأوجد قيمة س



المسابقات الكندية– الصف العاشر – ١٩ فبراير ٢٠٠٨

Canadian Mathematics Competition- Cayley Constant- ١٩ February ٢٠٠٨

الحل

∵ نصف قطر الدائرة الداخلية = ٢٠ سم

∴ مساحة الدائرة الداخلية = $(٢٠)^٢$ ط = ٤٠٠ ط $سم^٢$

∴ أجزاء النافذة التسع متساوية = ٤٠٠ ط $سم^٢$

∴ مساحة سطح الدائرة الكبرى = ٩ × ٤٠٠ ط = ٣٦٠٠ ط $سم^٢$

بفرض أن نصف قطر الدائرة الكبرى = ر

∴ $ر^٢$ ط = ٣٦٠٠ ط

∴ ر = ٦٠ سم

∵ امتداد س يقطع قطر الدائرة الكبرى

∴ ر = ٢٠ + س

∴ ٦٠ = ٢٠ + س

∴ س = ٤٠ سم

٢٣ للمعادلة : $٢^{س+٢} \times ٥^{٦-س} = ١٠^{س^٢}$ حلان حقيقيان . أوجدهما .

المسابقات الكندية – مسابقة إقليدس – الصف الثاني عشر – ١٥ ابريل ٢٠٠٨

Canadian Mathematics Competition- Euclid Constant –Grade ١٢- ١٥ April ٢٠٠٨

الحل

$\because ٢^{س+٢} \times ٥^{٦-س} = ١٠^{س^٢}$

$\therefore ٢^{س+٢} \times ٥^{٦-س} = ٢^{س^٢} \times ٥^{س^٢}$

$\therefore ٢^{س^٢} \times ٥^{س^٢} \times ٢^{-س-٢} \times ٥^{س-٦} = ١$

$\therefore ٢^{س^٢-س-٢} \times ٥^{س^٢+س-٦} = ١$

$\therefore (س^٢ - س - ٢)\ \text{لو}\ ٢ + (س^٢ + س - ٦)\ \text{لو}\ ٥ = \text{صفر}$

$\therefore (س - ٢)(س + ١)\ \text{لو}\ ٢ + (س - ٢)(س + ٣)\ \text{لو}٥ = \text{صفر}$

$\therefore (س - ٢)\left[(س + ١)\ \text{لو}\ ٢ + (س + ٣)\ \text{لو}٥\right] = \text{صفر}$

$\therefore (س - ٢)\left[س\ \text{لو}\ ٢ + \text{لو}٢ + س\ \text{لو}٥ + ٣\ \text{لو}٥\right] = \text{صفر}$

$\therefore (س - ٢)\left[س\ (\text{لو}\ ٢ + \text{لو}٥) + \text{لو}٢ + ٣\ \text{لو}٥\right] = \text{صفر}$

$\therefore (س - ٢)\left[س\ (\text{لو}\ ٢ + \text{لو}٥) + \text{لو}٢ + \text{لو}٥^٣\right] = \text{صفر}$

$\therefore (س - ٢)\left[س\ (\text{لو}\ ٢ + \text{لو}٥) + (\text{لو}٢ + \text{لو}\ ١٢٥)\right] = \text{صفر}$

$\therefore (س - ٢)\left[س\ (\text{لو}\ ٢ \times ٥) + (\text{لو}٢ \times ١٢٥)\right] = \text{صفر}$

$\therefore (س - ٢)\left[س\ (\text{لو}\ ١٠) + (\text{لو}٢٥٠)\right] = \text{صفر}$

$\therefore (س - ٢)\left[س + (\text{لو}٢٥٠)\right] = \text{صفر}$

$\therefore س = ٢$ ، $س = -\text{لو}_{١٠}\ ٢٥٠$

٢٤

إذا كانت س ، ص ، ع أعداد حقيقية موجبة ، س + ص + ع = ٤ أثبت أن :

$$\frac{1}{\text{٢س ص + س ع + ص ع}} + \frac{1}{\text{س ص + ٢س ع + ص ع}} + \frac{1}{\text{س ص + س ع + ٢ ص ع}} \leqslant \frac{1}{\text{س ص ع}}$$

البرامج التدريبية الموازية للاولمبياد الكندية – مشكلات يوليو وأغسطس ٢٠٠٨

Canadian Mathematical Society- Mathematical Olympiads Correspondence Program -Material ٢٠٠٨- Problems for July - August

الحل

بفرض أن : أ ، ب > صفر

$$\therefore (\text{أ} + \text{ب})^{-1} \leqslant \tfrac{1}{4}(\text{أ}^{-1} + \text{ب}^{-1})$$

$$\therefore \frac{1}{\text{٢س ص + س ع + ص ع}} \leqslant \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{\text{س ص + س ع}} + \frac{1}{\text{س ص + ص ع}}\right)$$

$$\therefore \leqslant \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{\text{س ص}} + \frac{1}{\text{س ع}}\right) + \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{\text{س ص}} + \frac{1}{\text{ص ع}}\right)\right]$$

$$\therefore \leqslant \tfrac{1}{16}\left(\frac{1}{\text{س ص}} + \frac{1}{\text{س ع}}\right) + \tfrac{1}{16}\left(\frac{1}{\text{س ص}} + \frac{1}{\text{ص ع}}\right)$$

$$\therefore \leqslant \tfrac{1}{16}\left(\frac{2}{\text{س ص}} + \frac{1}{\text{س ع}} + \frac{1}{\text{ص ع}}\right)$$

$$\therefore \leqslant \tfrac{1}{16}\left(\frac{\text{٢ع + ص + س}}{\text{س ص ع}}\right). \quad \text{-----------------------١}$$

بالمثل : $$\frac{1}{\text{س ص + ٢س ع + ص ع}} \leqslant \tfrac{1}{16}\left(\frac{\text{ع + ٢ص + س}}{\text{س ص ع}}\right). \quad \text{-----------------------٢}$$

بالمثل : $$\frac{1}{\text{س ص + س ع + ٢ ص ع}} \leqslant \tfrac{1}{16}\left(\frac{\text{ع + ص + ٢س}}{\text{س ص ع}}\right). \quad \text{-----------------------٣}$$

بجمع : (١) ، (٢) ، (٣)

$$\therefore \frac{1}{\text{٢س ص + س ع + ص ع}} + \frac{1}{\text{س ص + ٢س ع + ص ع}} + \frac{1}{\text{س ص + س ع + ٢ ص ع}} \leqslant \tfrac{1}{16}\left(\frac{\text{٤ع + ٤ص + ٤س}}{\text{س ص ع}}\right).$$

$$\therefore \frac{1}{\text{٢س ص + س ع + ص ع}} + \frac{1}{\text{س ص + ٢س ع + ص ع}} + \frac{1}{\text{س ص + س ع + ٢ ص ع}} \leqslant \tfrac{1}{16}\left(\frac{\text{٤(ع + ص + س)}}{\text{س ص ع}}\right).$$

∵ س + ص + ع = ٤

$$\therefore \frac{1}{\text{٢س ص + س ع + ص ع}} + \frac{1}{\text{س ص + ٢س ع + ص ع}} + \frac{1}{\text{س ص + س ع + ٢ ص ع}} \leqslant \tfrac{1}{16}\left(\frac{\text{٤} \times \text{٤}}{\text{س}}\right).$$

$$\therefore \frac{1}{\text{٢س ص + س ع + ص ع}} + \frac{1}{\text{س ص + ٢س ع + ص ع}} + \frac{1}{\text{س ص + س ع + ٢ ص ع}} \leqslant \frac{1}{\text{س ص ع}}$$

٢٥

حل المعادلة :

$$\left(\frac{١}{١٠}\right)^{\text{لو}_{\frac{١}{٤}}\left(\sqrt[٤]{\text{س}}-١\right)} - ٤^{\text{لو}_{١٠}\left(\sqrt[٤]{\text{س}}+٥\right)} = ٦ \qquad \text{حيث } \text{س} \geqslant ١$$

البرامج التدريبية الموازية للاولمبياد الكندية – مشكلات يوليو وأغسطس ٢٠٠٨

Canadian Mathematical Society- Mathematical Olympiads Correspondence Program -Material ٢٠٠٨- Problems for July - August

الحل

نفرض أن : $\text{س} = \text{لو}_{\frac{١}{٤}}\left(\sqrt[٤]{\text{س}}-١\right)$ ، $\text{ص} = \text{لو}_{١٠}\left(\sqrt[٤]{\text{س}}+٥\right)$

$\therefore \left(\frac{١}{٤}\right)^{\text{س}} = \sqrt[٤]{\text{س}} - ١$ ----------------- ١

، $(١٠)^{\text{ص}} = \sqrt[٤]{\text{س}} + ٥$ ----------------- ٢

من (١) : $\sqrt[٤]{\text{س}} = \left(\frac{١}{٤}\right)^{\text{س}} + ١$

من (٢) : $\sqrt[٤]{\text{س}} = (١٠)^{\text{ص}} - ٥$

$\therefore \left(\frac{١}{٤}\right)^{\text{س}} + ١ = (١٠)^{\text{ص}} - ٥$

$\therefore \left(\frac{١}{٤}\right)^{\text{س}} - (١٠)^{\text{ص}} = -٦$ ----------------- ٣

ومن الممكن كتابة المعادلة الرئيسية كالتالي :

$\left(\frac{١}{١٠}\right)^{\text{س}} - ٤^{\text{ص}} = ٦$ ----------------- ٤

من (٣) ، (٤)

$\therefore \left(\frac{١}{٤}\right)^{\text{س}} - (١٠)^{\text{ص}} = ٤^{\text{ص}} - \left(\frac{١}{١٠}\right)^{\text{س}}$

$\therefore \left(\frac{١}{٤}\right)^{\text{س}} - (١٠)^{\text{ص}} - ٤^{\text{ص}} + \left(\frac{١}{١٠}\right)^{\text{س}} = ٠$

$\therefore ٤^{-\text{س}} - ١٠^{\text{ص}} - ٤^{\text{ص}} + ١٠^{-\text{س}} = ٠$

∴ $(٤^{-س} - ٤^{ص}) + (١٠^{-س} - ١٠^{ص}) = ٠$

إذا كان : $-س < ص$ ← الطرف الأيسر $<$ صفر

إذا كان : $-س > ص$ ← الطرف الأيسر $>$ صفر

∴ $-س = ص$

من المعادلة (٤)

∴ $١٠^{ص} - ٤^{ص} = ٦$

∴ $ص = ١$

ولكن : $\sqrt[٤]{س} = (١٠)^{ص} - ٥$

∴ $\sqrt[٤]{س} = ١٠^{١} - ٥$

∴ $\sqrt[٤]{س} = ٥$

$س = ٥^{٤} = ٦٢٥$.

٢٥

أوجد مجموعة حل النظام :

$$٣\sqrt[٣]{س^{٢}ص^{٥}} = ٤(ص^{٢} - س^{٢})$$

$$٥\sqrt[٣]{س^{٤}ص} = س^{٢} + ص^{٢}$$

البرامج التدريبية الموازية للأولمبياد الكندية – مشكلات مايو ٢٠٠٨

Canadian Mathematical Society- Mathematical Olympiads Correspondence Program -Material ٢٠٠٨- Problems for May

الحل

نفرض أن : $٣\sqrt[٣]{س^{٢}ص^{٥}} = ٤(ص^{٢} - س^{٢})$ ------------------- ١

، $٥\sqrt[٣]{س^{٤}ص} = س^{٢} + ص^{٢}$ ------------------- ٢

بالضرب

$\therefore ١٥\sqrt[٣]{س^{٦}ص^{٦}} = ٤(ص^{٢} - س^{٢}) \times (س^{٢} + ص^{٢})$

$\therefore ١٥\, س^{٢}ص^{٢} = ٤(ص^{٤} - س^{٤})$

$\therefore ١٥\, س^{٢}ص^{٢} - ٤(ص^{٤} - س^{٤}) = ٠$

$\therefore ٤س^{٤} + ١٥\, س^{٢}ص^{٢} - ٤ص^{٤} = ٠$

$\therefore (٤س^{٢} - ص^{٢})(س^{٢} + ٤ص^{٢}) = ٠$

$\therefore ٤س^{٢} - ص^{٢} = ٠$ ومنها $٤س^{٢} = ص^{٢}$

$\therefore ص = \pm ٢\, س$ ------------------- ٣

، $س^{٢} + ٤ص^{٢} = ٠$ ومنها $س^{٢} = -٤ص^{٢}$ مرفوض

∴ من (٣) بالتعويض في (١) عن قيمة $ص = ٢س$

$\therefore ٣\sqrt[٣]{س^{٢}ص^{٥}} = ٤(ص^{٢} - س^{٢})$

$\therefore ٣\sqrt[٣]{س^{٧}٢^{٥}} = ١٢\, س^{٢}$ بالقسمة على ٣

$\therefore \sqrt[٣]{س^{٧}٢^{٥}} = ٤\, س^{٢}$ بالرفع للقوى الثالثة

$\therefore س^{٧} \times ٢^{٥} = (٤\, س^{٢})^{٣}$

∴ $٢^{٥}$ $س^{٧}$ = $٤^{٣}$ $س^{٦}$

∴ $٢^{٥}$ $س^{٧}$ = $٢^{٦}$ $س^{٦}$

∴ $٢^{٥}$ $س^{٧}$ − $٢^{٦}$ $س^{٦}$ = ٠

∴ $س^{٦}$ ($٢^{٥}$ س − $٢^{٦}$) = ٠

∴ س = ٠ ، ومنها ص = ٠

أو ، $٢^{٥}$ س − $٢^{٦}$ = ٠

ومنها : س = $\frac{٢^{٦}}{٢^{٥}}$ = ٢ ومنها : ص = ٤

بالتعويض مرة أخرى في (١) من : ص = − ٢ س والرفع للقوى الثالثة

∴ $س^{٧}$ × $(-٢)^{٥}$ = $(٤ س^{٢})^{٣}$

∴ $س^{٧}$ × $(-٢)^{٥}$ = $٢^{٦}$ $س^{٦}$

∴ $(-٢)^{٥}$ $س^{٧}$ − $٢^{٦}$ $س^{٦}$ = ٠

∴ $س^{٦}$ ($(-٢)^{٥}$ س − $٢^{٦}$) = ٠

∴ س = ٠ ، ومنها ص = ٠

أو ، $(-٢)^{٥}$ س − $٢^{٦}$ = ٠

ومنها : س = $\frac{٢^{٦}}{-٢^{٥}}$ = −٢ ومنها : ص = ٤

∴ م . ح = { (٠ ، ٠) ، (٢ ، ٤) ، (− ٢ ، ٤) }

٢٧

إذا كانت النقاط أ، ب، جـ، د أربع نقاط تقع في مستوى واحد بحيث ∠ أ جـ د ، ∠ ب جـ د زاويتان منفرجتان . اثبت أنه لأي نقطة س بحيث جـ س ⩾ جـ د تحقق المتباينة .

٢ أ د . ب د > (أ جـ + جـ د) . ب س

مسابقة المدارس الثانوية – برعاية معهد التكنولوجيا بجورجيا الأمريكية – ٢٠٠٨

Georgia Institute of Technology – High School Mathematics Competition ٢٠٠٨



∵ ∠ أ جـ د منفرجة

∴ | أ د |^2 > | أ جـ |^2 + | جـ د |^2

∴ | أ جـ |^2 + | جـ د |^2 ⩾ (أ جـ + جـ د)^2 ÷ ٢

∴ | أ د |^2 > (أ جـ + جـ د)^2 ÷ ٢

∴ ٢ | أ د |^2 > (أ جـ + جـ د)^2

∴ $\sqrt{2}$ أ د > أ جـ + جـ د ---------------- ١

بالمثل ∵ ∠ ب جـ د منفرجة

∴ | ب د |^2 > | ب جـ |^2 + | جـ د |^2

∴ | ب د |^2 > (ب جـ + جـ د)^2 ÷ ٢

∴ ٢ | ب د |^2 > (ب جـ + جـ د)^2

∴ $\sqrt{2}$ ب د > ب جـ + جـ د ---------------- ٢

بضرب (١) ، (٢)

∴ $\sqrt{2}$ أ د × $\sqrt{2}$ ب د > (أ جـ + جـ د) (ب جـ + جـ د)

∵ جـ س ⩾ جـ د

∴ ب جـ + جـ د ⩽ ب جـ + جـ س ⩽ ب س   من متباينة المثلث

∴ ٢ أ د . ب د > (أ جـ + جـ د) . ب س

٢٨

لكل أ، ب، جـ ∈ ح$^+$ اثبت أن :

$$1 < \frac{أ}{أ+ب} + \frac{ب}{ب+جـ} + \frac{جـ}{جـ+أ} < 2$$

مسابقة المدارس الثانوية – برعاية معهد التكنولوجيا بجورجيا الأمريكية – ٢٠٠٨

Georgia Institute of Technology – High School Mathematics Competition ٢٠٠٨

الحل

$$\because \frac{أ}{أ+ب} + \frac{ب}{ب+جـ} + \frac{جـ}{جـ+أ} > \frac{أ}{أ+ب+جـ} + \frac{ب}{ب+جـ+أ} + \frac{جـ}{جـ+أ+ب} = \frac{أ+ب+جـ}{أ+ب+جـ} = 1$$

$$\therefore \frac{أ}{أ+ب} + \frac{ب}{ب+جـ} + \frac{جـ}{جـ+أ} > 1 \text{ -----------------} 1$$

$$\because \left(\frac{أ}{أ+ب} + \frac{ب}{ب+جـ} + \frac{جـ}{جـ+أ}\right) + \left(\frac{ب}{أ+ب} + \frac{جـ}{ب+جـ} + \frac{أ}{جـ+أ}\right)$$

$$\therefore = \frac{أ+ب}{أ+ب} + \frac{ب+جـ}{ب+جـ} + \frac{جـ+أ}{جـ+أ} = 1 + 1 + 1 = 3$$

∵ الحدين داخل الأقواس كل منهما اكبر من الواحد الصحيح ، و مجموعهما يساوي ٣

$$\therefore \frac{أ}{أ+ب} + \frac{ب}{ب+جـ} + \frac{جـ}{جـ+أ} < 2 \text{ -----------------} 2$$

من (١) ، (٢) ينتج المطلوب

٢٩

اثبت أنه إذا كان : أ + ب + جـ = ٠ حيث أ، ب ، جـ ∈ ح فإن :

٣ أ ب جـ = أ^{٣} + ب^{٣} + جـ^{٣}

مسابقة المدارس الثانوية – برعاية معهد التكنولوجيا بجورجيا الأمريكية – ٢٠٠٨

Georgia Institute of Technology – High School Mathematics Competition ٢٠٠٦



∵ أ + ب + جـ = ٠

∴ (أ + ب + جـ)^{٣} = ٠

∴ أ^{٣} + ب^{٣} + جـ^{٣} + ٣ أ ب^{٢} + ٣ أ جـ^{٢} + ٣ ب أ^{٢} + ٣ ب جـ^{٢} + ٣ جـ أ^{٢} + ٣ جـ ب^{٢} + ٦ أ ب جـ = ٠

∴ (أ^{٣} + ب^{٣} + جـ^{٣}) – ٣ أ ب جـ + ٣ (أ ب^{٢} + ب أ^{٢} + أ ب جـ) + ٣ (جـ ب^{٢} + ب جـ^{٢} + أ ب جـ) +

٣(أ جـ^{٢} + جـ أ^{٢} + أ ب جـ) = ٠

∴ (أ^{٣} + ب^{٣} + جـ^{٣}) – ٣ أ ب جـ + ٣ أ ب (ب + أ + جـ) + ٣ ب جـ (ب + جـ + أ) + ٣ أ جـ (جـ + أ + ب) = ٠

∵ أ + ب + جـ = ٠

∴ (أ^{٣} + ب^{٣} + جـ^{٣}) – ٣ أ ب جـ = ٠

∴ (أ^{٣} + ب^{٣} + جـ^{٣}) = ٣ أ ب جـ

٣٠

لكل ٩ ، ب ، جـ ، د ∈ ح$^{+}$ اثبت أن :

$$\frac{(٩^{٢}+٩+١)(ب^{٢}+ب+١)(جـ^{٢}+جـ+١)(د^{٢}+د+١)}{٩\ ب\ جـ\ د} \geqslant ٨١$$

مسابقة المدارس الثانوية – برعاية معهد التكنولوجيا بجورجيا الأمريكية – ٢٠٠٦

Georgia Institute of Technology – High School Mathematics Competition ٢٠٠٧

الحل

∵ لكل عدد حقيقي س حيث $(س - ١)^{٢} \geqslant ٠$

∴ $س^{٢} - ٢س + ١ \geqslant ٠$

∴ $س^{٢} + ١ \geqslant ٢س$

وكذلك نستطيع الوصول إلى أن : $س^{٢} + س + ١ \geqslant ٣س$

وعليه نستطيع استنتاج أن :

$$(٩^{٢}+٩+١)(ب^{٢}+ب+١)(جـ^{٢}+جـ+١)(د^{٢}+د+١) \geqslant ٣\,٩ \times ٣\,ب \times ٣\,جـ \times ٣\,د$$

∴ $(٩^{٢}+٩+١)(ب^{٢}+ب+١)(جـ^{٢}+جـ+١)(د^{٢}+د+١) \geqslant ٨١\,٩\,ب\,جـ\,د$

∴ $$\frac{(٩^{٢}+٩+١)(ب^{٢}+ب+١)(جـ^{٢}+جـ+١)(د^{٢}+د+١)}{٩\ ب\ جـ\ د} \geqslant ٨١$$

٣١

إثبت انه إذا كان : س ، ص ، ع زوايا مثلث فإن :

ظا س + ظا ص + ظا ع = ظا س ظا ص ظا ع

مسابقة المدارس الثانوية – برعاية معهد التكنولوجيا بجورجيا الأمريكية – ٢٠٠٧

Georgia Institute of Technology – High School Mathematics Competition ٢٠٠٧



∵ س ، ص ، ع زوايا مثلث

∴ ∠ س + ∠ ص + ∠ ع = ١٨٠°

∴ ∠ س + ∠ ص = ١٨٠° – ∠ ع

∴ ظا (س + ص) = ظا (١٨٠° – ع)

∴ ظا (س + ص) = – ظا ع

∴ – ظا ع = $\frac{\text{ظا س + ظا ص}}{\text{١ – ظا س ظا ص}}$

∴ ظا س + ظا ص = – ظا ع + ظا س ظا ص ظا ع

∴ ظا س + ظا ص + ظا ع = ظا س ظا ص ظا ع

٣٢

حيث س ، ص ، ع أعداد صحيحة موجبة لا تساوي الصفر أوجد مجموعة حل النظام :

$$\text{س}^3 - \text{ص}^3 - \text{ع}^3 = 3\,\text{س ص ع} \quad , \quad \text{س}^2 = 2(\text{ص} + \text{ع})$$

مسابقة المدارس الثانوية – برعاية معهد التكنولوجيا بجورجيا الأمريكية – ٢٠٠٦

Georgia Institute of Technology – High School Mathematics Competition ٢٠٠٦

الحل

$\because\ 3\,\text{س ص ع} = \text{س}^3 - \text{ص}^3 - \text{ع}^3$

$\therefore\ 3\,\text{س ص ع} = \text{س}^3 - (\text{ص}^3 + \text{ع}^3)$

$\therefore\ 3\,\text{س ص ع} = \text{س}^3 - (\text{ص} + \text{ع})(\text{ص}^2 - \text{ص ع} + \text{ع}^2)$ باكمال المربع للحد الثاني من ناتج تحليل مجموع المكعبين

$\therefore\ 3\,\text{س ص ع} = \text{س}^3 - (\text{ص} + \text{ع})\left[(\text{ص}+\text{ع})^2 - 2\,\text{ص ع} - \text{ص ع}\right]$

$\therefore\ 3\,\text{س ص ع} = \text{س}^3 - (\text{ص} + \text{ع})\left[(\text{ص}+\text{ع})^2 - 3\,\text{ص ع}\right]$

$\therefore\ 3\,\text{س ص ع} = \text{س}^3 - (\text{ص} + \text{ع})^3 + 3\,\text{ص ع}(\text{ص}+\text{ع})$

$\therefore\ 3\,\text{س ص ع} = \left[\text{س}^3 - (\text{ص} + \text{ع})^3\right] + 3\,\text{ص ع}(\text{ص}+\text{ع})$

$\therefore\ 3\,\text{س ص ع} = \left[\text{س} - (\text{ص} + \text{ع})\right]\left[\text{س}^2 + \text{س}(\text{ص}+\text{ع}) + (\text{ص}+\text{ع})^2\right] + 3\,\text{ص ع}(\text{ص}+\text{ع})$

$\therefore\ \left[\text{س} - (\text{ص} + \text{ع})\right]\left[\text{س}^2 + \text{س}(\text{ص}+\text{ع}) + (\text{ص}+\text{ع})^2\right] + 3\,\text{ص ع}(\text{ص}+\text{ع}) - 3\,\text{س ص ع} = 0$

$\therefore\ \left[\text{س} - (\text{ص} + \text{ع})\right]\left[\text{س}^2 + \text{س}(\text{ص}+\text{ع}) + (\text{ص}+\text{ع})^2\right] + 3\,\text{ص ع}\left[(\text{ص}+\text{ع}) - \text{س}\right] = 0$

$\therefore\ \left[\text{س} - (\text{ص} + \text{ع})\right]\left[\text{س}^2 + \text{س}(\text{ص}+\text{ع}) + (\text{ص}+\text{ع})^2\right] - 3\,\text{ص ع}\left[\text{س} - (\text{ص}+\text{ع})\right] = 0$

$\therefore\ \left[\text{س} - (\text{ص} + \text{ع})\right]\left[\text{س}^2 + \text{س}(\text{ص}+\text{ع}) + (\text{ص}+\text{ع})^2 - 3\,\text{ص ع}\right] = 0$

$\therefore\ \left[\text{س} - (\text{ص} + \text{ع})\right]\left[\text{س}^2 + \text{س}(\text{ص}+\text{ع}) + \text{ص}^2 + 2\,\text{ص ع} + \text{ع}^2 - 3\,\text{ص ع}\right] = 0$

$\therefore\ \left[\text{س} - (\text{ص} + \text{ع})\right]\left[\text{س}^2 + \text{س}(\text{ص}+\text{ع}) + \text{ص}^2 - \text{ص ع} + \text{ع}^2\right] = 0$

$\therefore\ \left[\text{س} - (\text{ص} + \text{ع})\right]\left[\text{س}^2 + \text{س}(\text{ص}+\text{ع}) + (\text{ص}-\text{ع})^2 + 2\,\text{ص ع} - \text{ص ع}\right] = 0$

$\therefore\ \left[\text{س} - (\text{ص} + \text{ع})\right]\left[\text{س}^2 + \text{س}(\text{ص}+\text{ع}) + (\text{ص}-\text{ع})^2 + \text{ص ع}\right] = 0$

نلاحظ أن العامل : $\left[\text{س}^2 + \text{س}(\text{ص}+\text{ع}) + (\text{ص}-\text{ع})^2 + \text{ص ع}\right] \neq 0$ لأنه يتكون من حاصل جمع حدود موجبة

∴ $س - (ص + ع) = ٠$

∴ $س = ص + ع$ ---------------- ١

∵ $س^٢ = ٢(ص + ع)$

∴ $ص + ع = \frac{١}{٢} س^٢$ ---------------- ٢

من (١) ، (٢)

∴ $س = \frac{١}{٢} س^٢$

∴ $س^٢ - ٢س = ٠$

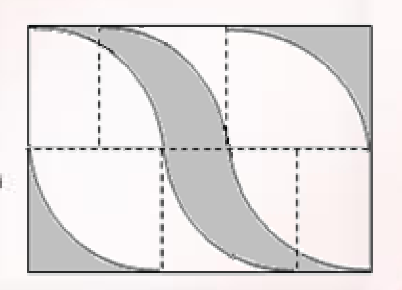
∴ $س (س - ٢) = ٠$

∴ $س = ٠$ مرفوض

∴ $س = ٢$

∴ $ص = ع = ١$

٣٣

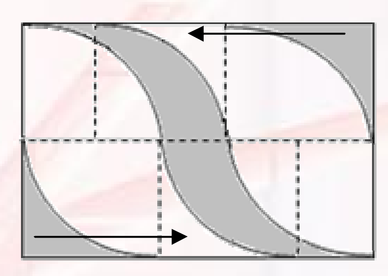


على الشكل المجاور : مستطيل أبعاده ٥سم ، ٤ سم ، تم تقسيمة بالمستقيمات المتعامدة على أضلاعة حسب المسافات الموضحة على الرسم ، إذا كانت جميع القواس المرسومة داخل المستطيل قي أرباع دوائر أنصاف اقطارها ٢ سم . فأوجد مجموع المساحات المظللة على الشكل .

تحدي المملكة المتحدة (بريطانيا) للمدارس المتوسطة – ٥ فبراير ٢٠٠٩

Uk Intermediate Mathematical Challenge – ٥th February ٢٠٠٩

الحل



إذا تحرك كل من الجزء المظلل في أقصى يسار ويمين المستطيل

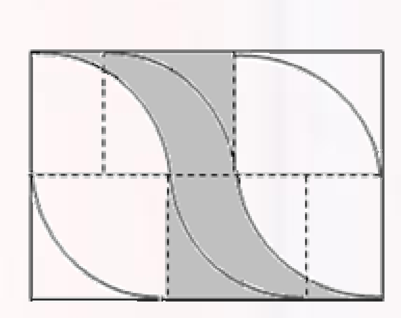
كما هو موضح بالأسهم .

فإننا نحصل على مستطيلين أبعادهما ٢ × ٣ من المناطق المظللة ما عدا ربعي دائرتين

أنصاف أقطار كل منهما ٢ سم



∴ مساحة الجزء المظلل = ٢ (٣ × ٢ − $\frac{١}{٤}$ × ط × ٢^{٢})



= ٢ (٦− $\frac{١}{٤}$ × ط × ٤)

= ٢ (٦− $\frac{١}{٤}$ × ط ×٤)

= ١٢ − ٢ ط سم^{٢}

٣٤

على الشكل المجاور :النقاط د ، هـ ، ك تقع على اضلاع المثلث أ ب جـ

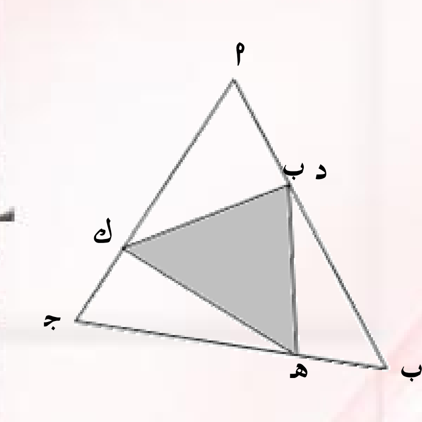
بحيث : أ ك = ٢ ك جـ، جـ هـ = ٢ هـ ب، ب د = ٢ د أ

أوجد النسبة : مساحة △ أ ب جـ / مساحة △ د هـ ك

المسابقة الثالثة والأربعون لثانوية كولمبوس بالولايات المتحدة الأمريكية ٢٣ فبراير ٢٠٠٨

Thirty-fourth Annual Columbus High School Tournament

٢٣ February ٢٠٠٨



الحل

∵ مساحة سطح △ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ أ جـ × جـ ب . جا أ جـ ب = $\frac{1}{2}$ (أ ك + ك جـ) × (ب هـ + هـ جـ) . جا أ جـ ب

= $\frac{1}{2}$ أ ب × ب جـ . جا أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ (أ د + د ب) × (ب هـ + هـ جـ) . جا أ ب جـ

= $\frac{1}{2}$ أ ب × أ جـ . جا ب أ جـ = $\frac{1}{2}$ (أ د + د ب) × (أ ك + ك جـ) . جا جـ أ ب

∵ أ ك = ٢ ك جـ ، جـ هـ = ٢ هـ ب ، ب د = ٢ د أ

∴ مساحة سطح △ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ أ جـ × جـ ب . جا أ جـ ب = $\frac{1}{2}$ (٣ ك جـ) × (٣ ب هـ) . جا أ جـ ب

= $\frac{1}{2}$ أ ب × ب جـ . جا أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ (٣ أ د) × (٣ ب هـ) . جا أ ب جـ

= $\frac{1}{2}$ أ ب × أ جـ . جا ب أ جـ = $\frac{1}{2}$ (٣ أ د) × (٣ ك جـ) . جا جـ أ ب

∴ مساحة سطح △ أ ب جـ = $\frac{9}{2}$ ك جـ × ب هـ . جا أ جـ ب

∴ ك جـ × ب هـ . جا أ جـ ب = $\frac{2}{9}$ مساحة سطح △ أ ب جـ

بالمثل

أ د × ب هـ . جا أ ب جـ = أ د × ك جـ . جا جـ أ ب = $\frac{2}{9}$ مساحة سطح △ أ ب جـ

∵ مساحة △ ك هـ جـ = $\frac{1}{2}$ (ك جـ) × (جـ هـ) . جا أ جـ ب = ك جـ × ب هـ . جا أ جـ ب

∵ مساحة △ هـ ب د = $\frac{1}{2}$ (ب د) × (ب هـ) . جا أ ب جـ = أ د × ب هـ . جا أ ب جـ

∴ مساحة △ أ د ك = $\frac{1}{2}$ أ د × أ ك . جا ب أ جـ = أ د × ك جـ . جا جـ أ ب

∵ مساحة △ ك د هـ = △ أ ب جـ − (△ ك هـ جـ + △ هـ ب د + △ أ د ك)

∴ مساحة △ ك د هـ = △ ٩ ب جـ −(ك جـ × ب هـ.جا ٩ جـ ب +٩ د×ب هـ .جا ٩ ب جـ + ٩ د×ك جـ .جا جـ ٩ ب)

∴ مساحة △ ك د هـ = △ ٩ ب جـ− (٢/٩ △ ٩ ب جـ −٢/٩ △ ٩ ب جـ −٢/٩ △ ٩ ب جـ)

∴ مساحة △ ك د هـ = △ ٩ ب جـ − ٣ × ٢/٩ △ ٩ ب جـ

∴ مساحة △ ك د هـ = △ ٩ ب جـ − ٢/٣ △ ٩ ب جـ

∴ مساحة △ ك د هـ = ١/٣ △ ٩ ب جـ

∴ △ ٩ ب جـ / مساحة △ د هـ ك = ٣

٣٥

إذا كانت : جا س + جا ص = ١ ÷ $\sqrt{٢}$ ، جتا س + جتا ص = $\sqrt{٢}$

أوجد قيمة جتا (س − ص)

المسابقة الثالثة والأربعون لثانوية كولمبوس بالولايات المتحدة الأمريكية ٢٣ فبراير ٢٠٠٨

Thirty-fourth Annual Columbus High School Tournament ٢٣ February ٢٠٠٨

الحل

∵ جا س + جا ص = ١ ÷ $\sqrt{٢}$

∴ (جا س + جا ص)^{٢} = $\frac{١}{٢}$

∴ جا^{٢}س + ٢ جا س جا ص + جا^{٢}ص = $\frac{١}{٢}$

∵ جتا س + جتا ص = $\sqrt{٢}$

∴ (جتا س + جتا ص)^{٢} = ٢

∴ جتا^{٢}س + ٢ جتا س جتا ص + جتا^{٢}ص = ٢

بالجمع

∴ جا^{٢}س + ٢ جا س جا ص + جا^{٢}ص + جتا^{٢}س + ٢ جتا س جتا ص + جتا^{٢}ص = $\frac{١}{٢}$ + ٢

∴ (جا^{٢}س + جتا^{٢}س) + (جا^{٢}ص + جتا^{٢}ص) + ٢ جا س جا ص + ٢ جتا س جتا ص = $\frac{١}{٢}$ + ٢

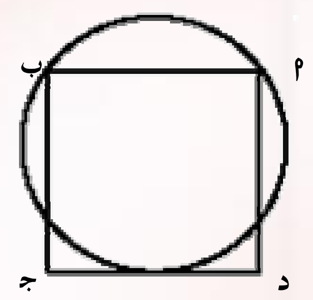
∴ ١ + ١ + ٢ (جا س جا ص + جتا س جتا ص) = $\frac{١}{٢}$ + ٢

∴ ٢ + ٢ (جا س جا ص + جتا س جتا ص) = $\frac{١}{٢}$ + ٢

∴ ٢ (جا س جا ص + جتا س جتا ص) = $\frac{١}{٢}$

∴ ٢ جتا (س − ص) = $\frac{١}{٢}$

∴ جتا (س − ص) = $\frac{١}{٤}$



٣٦

على الشكل : رأسي المربع م ، ب تقعان على محيط الدائرة م ،

والضلع د ج يمس الدائرة

إذان طول ضلع المربع ٢سم ، اوجد طول نصف قطر الدائرة

مسابقة الاولمبياد للمرحلة الثانوية – جنوب أفريقيا – التصفية الأولى – ١٨ مارس ٢٠٠٨

South African Mathematics Olympiad – Grades ١٠،١١ and ١٢ – ١٨ March ٢٠٠٨



نفرض أن م مركز الدائرة (ليست مركز المربع)

، كما نفرض س ، ص ، منتصفي د ج ، م ب على الترتيب

إذا كان نصف قطر الدائرة = ر

∴ م س = م ب = ر

∵ طول ضلع المربع = ٢ سم ∴ | ب ص | = ١ سم

باستخدام نظرية فيثاغورث في ∆ م ص ب ∴ م ص = $\sqrt{ر^{٢} - ١}$

∵ س ص = م س + م ص

∴ س ص = ر + $\sqrt{ر^{٢} - ١}$

ولكن : س ص = طول ضلع المربع = ٢ سم

∴ ٢ = ر + $\sqrt{ر^{٢} - ١}$

∴ ٢ – ر = $\sqrt{ر^{٢} - ١}$ بالتربيع

∴ ٤ – ٤ ر + ر^{٢} = ر^{٢} – ١

∴ ٤ – ٤ ر = – ١

∴ – ٤ ر = – ٥

∴ ٤ ر = ٥ ∴ ر = $\frac{٥}{٤}$ سم

٣٧

إذا كان الكسر : $\frac{٢٠٠٨}{١٩٩٨}$ يمكن كتابته على الصورة $ص + \cfrac{١}{ب + \cfrac{١}{د + \cfrac{١}{س}}}$

فأوجد قيمة س ، إذا كان س ، ب ، د ، ص $\in$ ص$^{+}$

تحدي المملكة المتحدة (بريطانيا) للمدارس الثانوية – ٦نوفمبر٢٠٠٨

Uk Senior Mathematical Challenge – ٦ November ٢٠٠٨

الحل

$\because$ $١ < \frac{٢٠٠٨}{١٩٩٨} < ٢$

، $\because$ $ص + \cfrac{١}{ب + \cfrac{١}{د + \cfrac{١}{س}}} = \frac{٢٠٠٨}{١٩٩٨}$

$\therefore$ $ص + \cfrac{١}{ب + \cfrac{١}{د + \cfrac{١}{س}}} = \frac{١٩٩٨}{١٩٩٨} + \frac{١٠}{١٩٩٨} = ١ + \frac{١٠}{١٩٩٨}$

$\therefore$ **ص = ١**

$\therefore$ $\cfrac{١}{ب + \cfrac{١}{د + \cfrac{١}{س}}} = \frac{١٠}{١٩٩٨}$

$\therefore$ $ب + \cfrac{١}{د + \cfrac{١}{س}} = \frac{١٩٩٨}{١٠} = \frac{١٩٩٠}{١٠} + \frac{٨}{١٠} = ١٩٩ + \frac{٨}{١٠}$

$\therefore$ **ب = ١٩٩**

$\therefore$ $\cfrac{١}{د + \cfrac{١}{س}} = \frac{٨}{١٠} = \frac{٤}{٥}$

$\therefore$ $\cfrac{د + \cfrac{١}{س}}{١} = \frac{٥}{٤} = د + \frac{١}{س} = \frac{٥}{٤} = ١ + \frac{١}{٤}$ $\therefore$ **د = ١ ، س = ٤**

٣٨ إذا كان طول وتر مثلث قائم الزاوية = √(١+٣+٥+٧+.....+٢٥) ، وطول ضلع القائمة الأول = √(١+٣+٥+٧+.....+س) وطول ضلعها الثاني = √(١+٣+٥+٧+.....+ص) حيث س ، ص أعداد صحيحة موجبة فأوجد قيمة : س + ص

تحدي المملكة المتحدة (بريطانيا) للمدارس الثانوية – ٦ نوفمبر ٢٠٠٨

Uk Senior Mathematical Challenge – ٦ November ٢٠٠٨

الحل

∵ ١ + ٣ + ٥ + ٧ + ... + (٢ ن + ١) = (ن + ١)^{2}

، ∵ طول الوتر = √(١+٣+٥+٧+.....+٢٥)

∴ ٢ ن + ١ = ٢٥

∴ ن = ١٢

∴ طول الوتر = ١٢ + ١ = ١٣

، ∵ طول ضلع القائمة الأول = √(١+٣+٥+٧+.....+س)

∴ ٢ ن + ١ = س

∴ ن = $\frac{1}{2}$ (س – ١)

، ∵ طول ضلع القائمة الثاني = √(١+٣+٥+٧+.....+ص)

∴ ٢ ن + ١ = ص

∴ ن = $\frac{1}{2}$ (ص – ١)

∴ ن في حالات الأضلاع الثلاثة = ١٢ ، $\frac{1}{2}$ (س – ١) ، $\frac{1}{2}$ (ص – ١)

∴ أطوال أضلاع المثلث = ١٢+ ١ ، $\frac{1}{2}$ (س – ١) + ١ ، $\frac{1}{2}$ (ص – ١) + ١

∴ طول وتر المثلث = ١٣ سم

∵ المثلث القائم الذي طول وترة ١٣ سم هو المثلث (١٣ ، ١٢ ، ٥)

∴ $\frac{1}{2}$ (س – ١) + ١ = ٥



∴ س = ٩

، ∴ $\frac{1}{2}$ (ص – ١) + ١ = ١٣

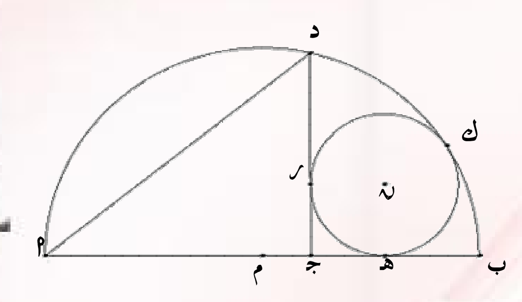
∴ ص = ٢٣

∴ س + ص = ٩ + ٢٣ = ٣٢

٣٩

على الشكل المجاور : $\overline{\text{د جـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ حيث $\overline{\text{أ ب}}$ قطر نصف الدائرة م ، رسمت الدائرة ن بحيث تمس أ ب في هـ ومحيط نصف الدائرة في ك كما تمس جـ د في ر .

أثبت أن : |أ د| = |أ هـ|



المسابقة رقم ٤٤ – أولمبياد ولاية ماساتشوستس الأمريكية –٢٠٠٧-٢٠٠٨

Forty-Fourth Annual –Massachusetts Mathematics Olympiad ٢٠٠٧-٢٠٠٨

الحل

نصل م ك

∵ م ك ⊥ المماس عند ك للدائرة م

، ∵ العمود على المماس من ك للدائرة ن يمر بالمركز

∴ م ك يمر بالنقطة ن

نفرض أن طول نصف قطر نصف الدائرة س ، ونصف قطر الدائرة ص

∵ م ن = م ك – ن ك = س – ص

، نفرض أن : |أ جـ| = ع ، |جـ ب| = ل

∵ ن هـ ⊥ أ ب

∴ من نظرية فيثاغورث : $|\text{م ن}|^{2} = |\text{ن هـ}|^{2} + |\text{م هـ}|^{2}$

∴ $|\text{م ن}|^{2} = |\text{ن هـ}|^{2} + |(\text{جـ هـ} + \text{م جـ})|^{2}$

∴ $(\text{س} - \text{ص})^{2} = \text{ص}^{2} + [\text{ص} + (\text{ع} - \text{س})]^{2}$

∴ $\text{س}^{2} - ٢\text{س ص} + \text{ص}^{2} = \text{ص}^{2} + \text{ص}^{2} + ٢\text{ ص }(\text{ع} - \text{س}) + (\text{ع} - \text{س})^{2}$

∴ $\text{س}^{2} - ٢\text{س ص} + \text{ص}^{2} = \text{ص}^{2} + \text{ص}^{2} + ٢\text{ ص ع} - ٢\text{ ص س} + \text{ع}^{2} - ٢\text{ س ع} + \text{س}^{2}$

∴ $\text{ص}^{2} + ٢\text{ ص ع} + \text{ع}^{2} - ٢\text{ س ع} = ٠$

∴ $(\text{ص}^{2} + \text{ع}^{2} + ٢\text{ ص ع}) - ٢\text{ س ع} = ٠$

∴ $(\text{ص}^{2} + ٢\text{ ص ع} + \text{ع}^{2}) - ٢\text{ س ع} = ٠$

∴ $(ص + ع)^2 - ٢ س ع = ٠$

∴ $(ص + ع)^2 = ٢ س ع$

∵ $س = \frac{1}{2}(ع + ل)$

∴ $(ص + ع)^2 = ٢ ع \times \frac{1}{2}(ع + ل)$

∴ $(ص + ع)^2 = ع(ع + ل)$

∵ $ﻫ = ع + ص = \sqrt{ع(ل+ع)} = \sqrt{ع^2 + ع ل}$ ٩ ---------------------- ١

بالمثل بتطبيق نظرية فيثاغورث على المثلث ٩ د جـ

$|٩ د|^2 = |٩ جـ|^2 + |جـ د|^2$

$|٩ د|^2 = ع^2 + |\sqrt{ل ع}|^2$

$|٩ د|^2 = ع^2 + ع ل$

$|٩ د| = \sqrt{ع^2 + ع ل}$ ---------------------- ٢

من (١) ، (٢)

٩ د = ٩ ﻫ

٤٠

إذا كانت : س ، ص أعداد حقيقية موجبة وكانت هـ زاوية بحيث هـ $\neq \frac{\pi}{2}$ ن حيث ن $\in$ ص ،

وبفرض أن :

$\frac{\text{جا هـ}}{\text{س}} = \frac{\text{جتا هـ}}{\text{ص}}$ ، $\frac{\text{جتا}^4\text{هـ}}{\text{س}^4} + \frac{\text{جا}^4\text{هـ}}{\text{ص}^4} = \frac{97 \text{ جا } 2 \text{ هـ}}{\text{س}^3\text{ص} + \text{ص}^3\text{س}}$ فأوجد قيمة : $\frac{\text{س}}{\text{ص}} + \frac{\text{ص}}{\text{س}}$

مسابقات ولاية ماساتشوستس الأمريكية – المسابقة ١٢ لمعهد هارفارد – ٢١ فبراير ٢٠٠٩

th Annual Harvard – MIT Mathematics Tournament - ٢١ February ٢٠٠٩

١٢Massachusetts Mathematics Competitions -

الحل

بفرض أن : $\frac{\text{جا هـ}}{\text{س}} = \frac{\text{جتا هـ}}{\text{ص}} = \frac{1}{\text{ك}}$ حيث ك $\in$ ح $- \{0\}$

$\therefore$ س = ك جا هـ ، ص = ك جتا هـ

$\therefore$ بالتعويض في العلاقة : $\frac{\text{جتا}^4\text{هـ}}{\text{س}^4} + \frac{\text{جا}^4\text{هـ}}{\text{ص}^4} = \frac{97 \text{ جا } 2 \text{ هـ}}{\text{س}^3\text{ص} + \text{ص}^3\text{س}}$ مع اعتبار أن : جا٢هـ = ٢ جا هـ جتا هـ

$$\therefore \frac{\text{جتا}^4\text{هـ}}{\text{ك}^4\text{ جا}^4\text{ هـ}} + \frac{\text{جا}^4\text{هـ}}{\text{ك}^4\text{ جتا}^4\text{ هـ}} = \frac{97\ (2\text{جا هـ جتا هـ})}{\text{ك}^3\text{جا}^3\text{ هـ} \times \text{ك جتا هـ} + \text{ك}^3\text{جتا}^3\text{ هـ} \times \text{ك جا هـ}}$$

$$\therefore \frac{1}{\text{ك}^4}\left(\frac{\text{جتا}^4\text{هـ}}{\text{جا}^4\text{هـ}} + \frac{\text{جا}^4\text{هـ}}{\text{جتا}^4\text{هـ}}\right) = \frac{194\text{ جا هـ جتا هـ}}{\text{ك}^4\text{جا}^3\text{هـ جتا هـ} + \text{ك}^4\text{جتا}^3\text{هـ جا هـ}}$$

$$\therefore \frac{1}{\text{ك}^4}\left(\frac{\text{جتا}^4\text{هـ}}{\text{جا}^4\text{هـ}} + \frac{\text{جا}^4\text{هـ}}{\text{جتا}^4\text{هـ}}\right) = \frac{1}{\text{ك}^4} \times \frac{194\text{ جا هـ جتا هـ}}{\text{جا هـ جتا هـ}\ (\text{جا}^2\text{هـ} + \text{جتا}^2\text{هـ})}$$

$$\therefore \frac{\text{جتا}^4\text{هـ}}{\text{جا}^4\text{هـ}} + \frac{\text{جا}^4\text{هـ}}{\text{جتا}^4\text{هـ}} = \frac{194\text{ جا هـ جتا هـ}}{\text{جا هـ جتا هـ} \times 1}$$

$$\therefore \frac{\text{جتا}^4\text{هـ}}{\text{جا}^4\text{هـ}} + \frac{\text{جا}^4\text{هـ}}{\text{جتا}^4\text{هـ}} = 194$$

من العلاقة : $\frac{\text{جا هـ}}{\text{س}} = \frac{\text{جتا هـ}}{\text{ص}}$ $\therefore$ $\frac{\text{جا هـ}}{\text{جتا هـ}} = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

$\therefore \frac{\text{ص}^4}{\text{س}^4} + \frac{\text{س}^4}{\text{ص}^4} = 194$ -------------------- ١

نفرض أن : $ع = \frac{ص}{س} + \frac{س}{ص}$

$\therefore ع^{٢} = \left(\frac{ص}{س} + \frac{س}{ص}\right)^{٢}$

$\therefore ع^{٢} = \frac{ص^{٢}}{س^{٢}} + \frac{س^{٢}}{ص^{٢}} + ٢$

$\therefore ع^{٢} - ٢ = \frac{ص^{٢}}{س^{٢}} + \frac{س^{٢}}{ص^{٢}}$

$\therefore (ع^{٢} - ٢)^{٢} = \left(\frac{ص^{٢}}{س^{٢}} + \frac{س^{٢}}{ص^{٢}}\right)^{٢}$

$\therefore (ع^{٢} - ٢)^{٢} = \frac{ص^{٤}}{س^{٤}} + \frac{س^{٤}}{ص^{٤}} + ٢$

$\therefore (ع^{٢} - ٢)^{٢} - ٢ = \frac{ص^{٤}}{س^{٤}} + \frac{س^{٤}}{ص^{٤}}$ ------------------ ٢

من (١) ، (٢)

$\therefore (ع^{٢} - ٢)^{٢} - ٢ = ١٩٤$

$\therefore (ع^{٢} - ٢)^{٢} = ١٩٦$

$\therefore ع^{٢} - ٢ = ١٤$

$\therefore ع^{٢} = ١٦$

$\therefore ع = ٤$

$\therefore ع = \frac{ص}{س} + \frac{س}{ص} = ٤$

٤١

إذا كان : أ ، ب ، جـ ∈ صـ بحيث كان القاسم المشترك الأكبر لكثيرتي الحدود : س^{٢} + أ س + ب ، س^{٢} + ب س + جـ هو س + ١ ، وكان المضاعف المشترك الأصغر لهما هو: س^{٣} − ٤س^{٢} + س + ٦

اوجد : أ + ب + جـ

مسابقات ولاية ماساتشوستس الأمريكية – المسابقة ١٢ لمعهد هارفارد – ٢١ فبراير ٢٠٠٩

١٢ th Annual Harvard – MIT Mathematics Tournament – ٢١ February ٢٠٠٩

Massachusetts Mathematics Competitions

الحل

∵ س + ١ = قاسم للمقدار : س^{٢} + أ س + ب

، ∵ الحد المطلق للمقدار : س^{٢} + أ س + ب هو ب

∴ س^{٢} + أ س + ب = (س + ١) (س + ب) ———————— ١

وبالمثل

∴ س^{٢} + أ س + ب = (س + ١) (س + جـ) ———————— ٢

من (١) : أ = مجموع الجذرين ⟵ أ = ب + ١ ————— ٣

من (١) : ب = مجموع الجذرين ⟵ أ = جـ + ١ ————— ٤

من (٣) ، (٤)

∴ أ = ب + ١ ، أ = (جـ + ١) + ١

∴ أ = ب + ١ = جـ + ٢

∵ المضاعف المشترك الأصغر للمقدارين : س^{٢} + أ س + ب ، س^{٢} + ب س + جـ

= (س + ١) (س + ب) (س + جـ)

= (س + ١) (س + ب) (س + ب − ١)

وحيث أن المضاعف المعطى في المسألة = س^{٣} − ٤س^{٢} + س + ٦

∴ س^{٣} − ٤س^{٢} + س + ٦ = (س + ١) (س + ب) (س + ب − ١)

∴ $س^{٣} - ٤س^{٢} + س + ٦ = س^{٣} + ٢ب س^{٢} + س(ب^{٢} + ب - ١) + ب^{٢} - ب$

بمساواة المعاملات :

∴ ٢ ب = − ٤ ومنها : ب = −٢

∴ ٢ = −٢ + ١ = −١

∴ جـ = −٢ − ١ = −٣

∴ ٢ + ب + جـ = −٦

٤٢

على الشكل المجاور :الشكل o يمكن أن يتحرك في أي اتجاه داخل مربعات الجدول ، أوجد أقل عدد ممكن من الحركات بحيث يكون في كل صف وكل عمود عدد ثلاث o

o	o	o	o	
o	o	o		o
o	o			
o	o	o	o	
		o		

مسابقات الرياضيات الكندية – مسابقة فيرمات للصف الحادي عشر – ١٨فبراير ٢٠٠٩

Canadian Mathematics Competition – Fermat Contest
(Grade ١١) – ١٨ February ٢٠٠٩

الحل

∵ يوجد عدد ٤ o في أول ثلاثة اعمدة

∴ لابد من تحريك o واحدة من كل عمود لكي نحصل على ثلاثة o في كل عمود

، أي أننا نحتاج إلى ثلاثة حركات كالتالي :

١.نحرك o من أقصى أعلى يسار الجدول إلى أدنى يمين الجدول

	o	o	o	
o	o	o		o
o	o			
o	o	o	o	
		o		o

٢. نحرك o الواقعة من تقاطع الصف الرابع مع العمود الثالث إلى تقاطع الصف

الخامس مع العمود الرابع

	o	o	o	
o	o	o		o
o	o			
o	o		o	
		o	o	o

٢. نحرك o الواقعة من تقاطع الصف الثاني مع العمود الثاني إلى تقاطع العمود

الخامس مع الصف الثالث

	o	o	o	
o		o		o
o	o			o
o	o		o	
		o	o	o

∴ أقل عدد من الحركات = ٣

٤٣

يوم الاثنين ، هانك يقود سيارته من بيته لعمله بمعدل سرعة ٧٠كم/ ساعة فوصل متأخراً دقيقة واحدة ، يوم الثلاثاء غادر بيته في نفس الوقت وقاد سيارته في نفس الطريق ولكن بسرعة قدرها ٧٥كم/ ساعة فوصل عمله مبكراً دقيقة واحدة ، أوجد المسافة بين بيته وعمله .

مسابقات الرياضيات الكندية – مسابقة فيرمات للصف الحادي عشر – ١٨فبراير ٢٠٠٩

Canadian Mathematics Competition – Fermat Contest (Grade ١١) – ١٨ February ٢٠٠٩

الحل

نفرض أ ن طول مسافة الطريق = ف كم

∵ الرجل يصل مبكراً دقيقة واحدة عندما يقود بسرعة ٧٥كم/ ساعة ، ويصل متأخراً دقيقة واحدة عند سرعة ٧٠كم/ اعة

∴ الفرق في الزمن = دقيقتين = $\frac{١}{٣٠}$ من الساعة

∴ الزمن الذي تأخذه الرحلة عند السرعة ٧٥ كم / ساعة= $\frac{ف}{٧٥}$ ساعة

∴ الزمن الذي تأخذه الرحلة عند السرعة ٧٠ كم / ساعة= $\frac{ف}{٧٠}$ ساعة

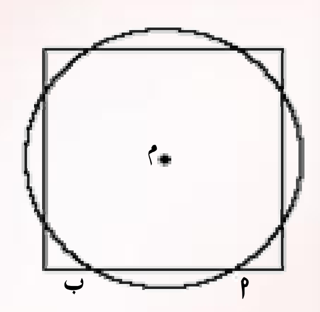
∴ $\frac{ف}{٧٠} - \frac{ف}{٧٥} = \frac{١}{٣٠}$

∴ $\frac{٧٥ف - ٧٠ف}{٧٠ \times ٧٥} = \frac{١}{٣٠}$

∴ ٥ ف = $\frac{٧٠ \times ٧٥}{٣٠}$ = ٧ × ٢٥

∴ ف = ٣٥ كم

٤٤ على الشكل : دائرة ومربع مركزهما م ولهما نفس المساحة ،
ويتقاطعان معا في ﻫ ، ب
إذا كان نصف قطر الدائرة ١ سم ، فأوجد طول ﻫ ب



مسابقات الرياضيات الكندية – مسابقة فيرمات للصف الحادي عشر – ١٨فبراير ٢٠٠٩

Canadian Mathematics Competition – Fermat Contest (Grade ١١) – ١٨ February ٢٠٠٩

الحل

∵ نصف قطر الدائرة = ١ سم

∴ مساحة سطح الدائرة = $١^٢$ ط = ط $سم^٢$

∵ مساحة سطح الدائرة = مساحة سطح المربع = ط

∴ طول ضلع المربع = $\sqrt{ط}$

نفرض أن : س منتصف ﻫ ب

∴ م س ⊥ ﻫ ب

∵ م مركز المربع

∴ م س = $\frac{١}{٢}$ طول ضلع المربع = $\frac{١}{٢}\sqrt{ط}$

باستخدام نظرية فيثاغورث على المثلث ﻫ م س القائم في زاوية س

∴ ١ = $|ﻫ س|^٢ + |\frac{١}{٢}\sqrt{ط}|^٢$

∴ $|ﻫ س|^٢$ = ١ − $\frac{١}{٤}$ ط

∴ |ﻫ س| = $\sqrt{١ - \frac{١}{٤} ط}$ سم

∴ |ﻫ ب| = ٢$\sqrt{١ - \frac{١}{٤} ط}$ سم

٤٥

إذا كانت : $\frac{١}{١^{٢}}+\frac{١}{٢^{٢}}+\frac{١}{٣^{٢}}+\frac{١}{٤^{٢}}+\dots\dots=\frac{ط^{٢}}{٦}$ ، فأوجد قيمة $\frac{١}{١^{٢}}-\frac{١}{٢^{٢}}+\frac{١}{٣^{٢}}-\frac{١}{٤^{٢}}+\dots\dots$

أولمبياد جنوب أفريقيا – التصفية الأولى – المرحلة الثانوية – ١٨ مارس ٢٠٠٩

South AfRICAN Mathematics Olympiad – First Round – Grades ١٠،١١ and١٢ – ١٨ March ٢٠٠٩

الحل

نفرض أن : س = $\frac{١}{١^{٢}}-\frac{١}{٢^{٢}}+\frac{١}{٣^{٢}}-\frac{١}{٤^{٢}}+\dots\dots$ و بما أنه يمكن كتابة : $\frac{١}{١^{٢}}+\frac{١}{٢^{٢}}+\frac{١}{٣^{٢}}+\frac{١}{٤^{٢}}+\dots\dots=\frac{ط^{٢}}{٦}$

على الصورة : $\frac{١}{١^{٢}}+\frac{١}{١^{٢}}-\frac{١}{١^{٢}}+\frac{١}{٢^{٢}}+\frac{١}{٢^{٢}}-\frac{١}{٢^{٢}}+\frac{١}{٣^{٢}}+\frac{١}{٣^{٢}}-\frac{١}{٣^{٢}}+\frac{١}{٤^{٢}}+\frac{١}{٤^{٢}}-\frac{١}{٤^{٢}}+\dots\dots=\frac{ط^{٢}}{٦}$

$\therefore \left(\frac{١}{١^{٢}}-\frac{١}{٢^{٢}}+\frac{١}{٣^{٢}}-\frac{١}{٤^{٢}}+\dots\dots\right)+\frac{١}{١^{٢}}-\frac{١}{١^{٢}}+\frac{١}{٢^{٢}}+\frac{١}{٢^{٢}}+\frac{١}{٣^{٢}}-\frac{١}{٣^{٢}}+\frac{١}{٤^{٢}}+\frac{١}{٤^{٢}}+\dots\dots=\frac{ط^{٢}}{٦}$

$\therefore$ س $+\frac{١}{١^{٢}}-\frac{١}{١^{٢}}+\frac{١}{٢^{٢}}+\frac{١}{٢^{٢}}+\frac{١}{٣^{٢}}-\frac{١}{٣^{٢}}+\frac{١}{٤^{٢}}+\frac{١}{٤^{٢}}+\dots\dots=\frac{ط^{٢}}{٦}$

$\therefore$ س $+ ٢\times\frac{١}{٢^{٢}}+٢\times\frac{١}{٤^{٢}}+٢\times\frac{١}{٦^{٢}}+\dots\dots=\frac{ط^{٢}}{٦}$

$\therefore$ س $+ ٢\times\left(\frac{١}{١^{٢}\times٢^{٢}}+\frac{١}{٢^{٢}\times٢^{٢}}+\frac{١}{٣^{٢}\times٢^{٢}}+\dots\dots\right)=\frac{ط^{٢}}{٦}$

$\therefore$ س $+ ٢\times\frac{١}{٢^{٢}}\left(\frac{١}{١^{٢}}+\frac{١}{٢^{٢}}+\frac{١}{٣^{٢}}+\dots\dots\right)=\frac{ط^{٢}}{٦}$

ولكن : $\frac{١}{١^{٢}}+\frac{١}{٢^{٢}}+\frac{١}{٣^{٢}}+\frac{١}{٤^{٢}}+\dots\dots=\frac{ط^{٢}}{٦}$

$\therefore$ س $+\frac{١}{٢}\times\left(\frac{ط^{٢}}{٦}\right)=\frac{ط^{٢}}{٦}$

$\therefore$ س $+\frac{١}{٢}\times\frac{ط^{٢}}{٦}=\frac{ط^{٢}}{٦}$

$\therefore$ س $=\frac{٢ط^{٢}}{١٢}-\frac{ط^{٢}}{١٢}=\frac{ط^{٢}}{١٢}$

$\therefore \frac{١}{١^{٢}}-\frac{١}{٢^{٢}}+\frac{١}{٣^{٢}}-\frac{١}{٤^{٢}}+\dots\dots=\frac{ط^{٢}}{١٢}$

٤٦

أوجد مجموع الحلول الحقيقية للمعادلة : $\text{س}^{٦} - ١٤\text{س}^{٤} - ٤٠\text{س}^{٣} - ١٤\text{س}^{٢} + ١ = ٠$

مسابقات الرياضيات لولاية بنسلفانيا الأمريكية – ٧ مارس ٢٠٠٩

Pennsylvania Math Competition – Lehigh University High School Math Constant – ٧ March ٢٠٠٩

الحل

نفرض أن : $\text{ص} = \text{س} + \frac{١}{\text{س}}$

$$\therefore \text{ص}^{٣} = \left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)^{٣} = \text{س}^{٣} + ٢\text{س} + \frac{١}{\text{س}} + \text{س} + \frac{٢}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^{٣}}$$

$$= \text{س}^{٣} + \frac{١}{\text{س}^{٣}} + ٣\text{س} + \frac{٣}{\text{س}}$$

$$= \text{س}^{٣} + \frac{١}{\text{س}^{٣}} + ٣\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right)$$

$$= \text{س}^{٣} + \frac{١}{\text{س}^{٣}} + ٣\,\text{ص}$$

بقسمة المعادلة : $\text{س}^{٦} - ١٤\text{س}^{٤} - ٤٠\text{س}^{٣} - ١٤\text{س}^{٢} + ١ = ٠$ على $\text{س}^{٣}$

$$\therefore \text{س}^{٣} - ١٤\text{س} - ٤٠ - \frac{١٤}{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}^{٣}} = ٠$$

$$\therefore \text{س}^{٣} + \frac{١}{\text{س}^{٣}} - ١٤\left(\text{س} + \frac{١}{\text{س}}\right) - ٤٠ = ٠$$

$$\therefore \text{س}^{٣} + \frac{١}{\text{س}^{٣}} - ١٤\,\text{ص} - ٤٠ = ٠$$

$$\therefore \left(\text{س}^{٣} + \frac{١}{\text{س}^{٣}} + ٣\,\text{ص}\right) - ١٧\,\text{ص} - ٤٠ = ٠$$

ولكن : $\text{ص}^{٣} = \text{س}^{٣} + \frac{١}{\text{س}^{٣}} + ٣\,\text{ص}$

$$\therefore \text{ص}^{٣} - ١٧\,\text{ص} - ٤٠ = ٠$$

$$\therefore \text{ص}^{٣} - ١٧\,\text{ص} - ٤٠ + ١٢٥ - ١٢٥ = ٠$$

$$\therefore (\text{ص}^{٣} - ١٢٥) - (١٧\,\text{ص} - ٨٥) = ٠$$

$\therefore$ (ص − ٥) (ص^{٢} + ٥ص + ٢٥) − ١٧ (ص − ٥) = ٠

$\therefore$ (ص − ٥) [(ص^{٢} + ٥ص + ٢٥) − ١٧] = ٠

$\therefore$ (ص − ٥) [ص^{٢} + ٥ص + ٨] = ٠

$\therefore$ ص = ٥ (المقدار : ص^{٢} + ٥ص + ٨ ليس له حلول حقيقة)

$\therefore$ س + $\frac{١}{س}$ = ٥

$\therefore$ س^{٢} − ٥ س + ١ = ٠

$\therefore$ مجموع جذور المعادلة = ٥

٤٧ أوجد العدد الصحيح الذي يساوي : $\sqrt{١٢٩٦+٢٠٠٠\times٢٠٠٨\times٢٠٠٩\times٢٠١٧}$ دون استخدام الآلة الحاسبة

مسابقات الرياضيات لولاية بنسلفانيا الأمريكية – ٧ مارس ٢٠٠٩

Pennsylvania Math Competition – Lehigh University High School Math Constant
٧ March ٢٠٠٩

الحل

نفرض أن : أ = ٢٠٠٠

∴ يمكن كتابة ما تحت الجذر على الصورة :

$أ \times (أ + ٨) \times (أ + ٩) \times (أ + ١٧) + ١٢٩٦$

$= [أ \times (أ + ١٧)] \times [(أ + ٨) \times (أ + ٩)] + ١٢٩٦$

$= (أ^٢ + ١٧أ) \times (أ^٢ + ١٧أ + ٧٢) + ١٢٩٦$

نفرض أن : ب = $أ^٢ + ١٧أ + ٣٦$ (ما تحت الجذر)

∴ $(أ^٢ + ١٧أ) \times (أ^٢ + ١٧أ + ٧٢) + ١٢٩٦ = (ب - ٣٦)(ب + ٣٦) + ١٢٩٦$

$= (ب^٢ - ١٢٩٦) + ١٢٩٦$

$= ب^٢$

∴ $\sqrt{١٢٩٦+٢٠٠٠\times٢٠٠٨\times٢٠٠٩\times٢٠١٧} = \sqrt{ب^٢}$

∴ ب = $أ^٢ + ١٧أ + ٣٦$

∴ ب = $(٢٠٠٠)^٢ + ١٧ \times ٢٠٠٠ + ٣٦$

∴ ب = ٤٠٠٠٠٠٠ + ٣٤٠٠٠ + ٣٦

∴ ب = ٤٠٣٤٠٣٦

٤٨

إذا كان : $٠ \leqslant س \leqslant \pi$ ، جا $\frac{س}{٢} = \sqrt{١+جاس} - \sqrt{١-جاس}$ فأوجد جميع قيم ظا س الممكنة.

مسابقات الرياضيات لولاية بنسلفانيا الأمريكية – ٧ مارس ٢٠٠٩

Pennsylvania Math Competition – Lehigh University High School Math Constant – ٧ March ٢٠٠٩

الحل

∴ جا $\frac{س}{٢} = \sqrt{١+جاس} - \sqrt{١-جاس}$

بالتربيع ∴ جا^{٢} $\frac{س}{٢}$ = $\left(\sqrt{١+جاس} - \sqrt{١-جاس}\right)^{٢}$

= ١ + جا س + ١ – جا س – ٢ $\sqrt{١-جا^{٢}س}$

= ٢ – ٢ $\sqrt{١-جا^{٢}س}$

∴ جتا^{٢} هـ = ١ – جا^{٢} هـ

∴ جا^{٢} $\frac{س}{٢}$ = ٢ – ٢ $\sqrt{جتا^{٢}س}$

∴ جا^{٢} $\frac{س}{٢}$ = ٢ – ٢ |جتا س|

∴ جا^{٢} $\frac{س}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ (١ – جتا س)

∴ $\frac{١}{٢}$ (١ – جتا س) = ٢ – ٢ |جتا س| = ٢ (١ – |جتا س|)

∴ ١ – جتا س = ٤ (١ – |جتا س|)

إذا كانت : جتا س $\geqslant$ ٠

∴ ١ – جتا س = ٤ – ٤جتا س

∴ ٣ جتا س = ٣

∴ جتا س = ١

∴ ظا س = ٠

إذا كانت : جتا س < ٠

∴ ١ − جتا س = ٤ + ٤ جتا س

∴ − ٥ جتا س = ٣

∴ جتا س = $-\frac{٣}{٥}$

∴ ظا س = $-\frac{٤}{٣}$

∴ قيم ظا س الممكنة = $\{ ٠ ، -\frac{٤}{٣} \}$

٤٩

إذا كان : د(س^{٢}+١) = س^{٤}+ ٥ س^{٢} + ٣ فأوجد د(س^{٢}−١)

مسابقات الرياضيات لولاية كارولينا الجنوبية – مسابقة المدارس الثانوية – ٦ ديسمبر ٢٠٠٨

South Carolina Math Competition - High School Math Constant – ٦ December ٢٠٠٨



$\because$ د(س^{٢}+١) = س^{٤}+ ٥ س^{٢} + ٣

= س^{٤} + ٢ س^{٢} + ٣ س^{٢} + ٣

= س^{٤} + ٢ س^{٢} + ٣ (س^{٢} + ١)

= س^{٤} + ٢ س^{٢} + ١ − ١ + ٣ (س^{٢} + ١)

= (س^{٤} + ٢ س^{٢} + ١) + ٣ (س^{٢} + ١) − ١

= (س^{٢} + ١)^{٢} + ٣ (س^{٢} + ١) − ١

$\therefore$ د(س^{٢}−١) = (س^{٢} − ١)^{٢} + ٣ (س^{٢} − ١) − ١

$\therefore$ د(س^{٢}−١) = س^{٤} − ٢ س^{٢} + ١ + ٣ س^{٢} − ٣ − ١

$\therefore$ د(س^{٢}−١) = س^{٤} + س^{٢} − ٣

٥٠

أوجد مجموعة حل المعادلة : س^٤ = ص^٢ + ٧١

المسابقة رقم ٢٨ للمدارس الثانوية – ٧ مارس ٢٠٠٨ – ولاية بنسلفانيا الأمريكية

The ٢٨th annual Lehigh University High School Math Contest was held Saturday, March ٧, ٢٠٠٨- Pennsylvania Math Competitions



∵ س^٤ = ص^٢ + ٧١

∴ س^٤ – ص^٢ = ٧١

∴ (س^٢ – ص) (س^٢ + ص) = ٧١

∴ (س^٢ – ص) (س^٢ + ص) = ١ × ٧١

∴ س^٢ – ص = ١ ---------------------(١)

∴ س^٢ + ص = ٧١ ---------------------(٢)

بجمع (١) ، (٢)

∴ ٢ س^٢ = ٧٢

∴ س^٢ = ٣٦

∴ س = ± ٦

بطرح (١) من (٢)

∴ ٢ص = ٧٠

∴ ص = ٣٥

∴ م . ح = {(٦ ، ٣٥) ، (-٦ ، ٣٥)}

٥١

إذا كان : أ ، ب ، د أعداد موجبة وكان أ ، ب > ١ . أوجد مجموعة حل المعادلة :-

$$\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{س} - \text{لو}_{\text{ب}}\,(\text{س} - \text{د}) = \text{أ}$$

مسابقات الرياضيات لولاية كارولينا الشمالية – مسابقة المدارس الثانوية – ٩ مارس ٢٠٠٩

Noorth Carolina Math Competition - High School Math Constant – ٩ March ٢٠٠٩



$\because$ $\text{لو}_{\text{ب}}\,\text{س} - \text{لو}_{\text{ب}}\,(\text{س} - \text{د}) = \text{أ}$

$\therefore$ $\text{لو}_{\text{ب}}\,\dfrac{\text{س}}{\text{س} - \text{د}} = \text{أ}$

$\therefore$ $\text{ب}^{\text{أ}} = \dfrac{\text{س}}{\text{س} - \text{د}}$

$\therefore$ $\text{س} = \text{ب}^{\text{أ}}\,(\text{س} - \text{د})$

$\therefore$ $\text{س} = \text{ب}^{\text{أ}}\,\text{س} - \text{ب}^{\text{أ}}\,\text{د}$

$\therefore$ $\text{س} - \text{ب}^{\text{أ}}\,\text{س} = -\,\text{ب}^{\text{أ}}\,\text{د}$

$\therefore$ $\text{ب}^{\text{أ}}\,\text{س} - \text{س} = \text{ب}^{\text{أ}}\,\text{د}$

$\therefore$ $\text{س}\,(\text{ب}^{\text{أ}} - ١) = \text{ب}^{\text{أ}}\,\text{د}$

$\therefore$ $\text{س} = \text{ب}^{\text{أ}}\,\text{د} \div (\text{ب}^{\text{أ}} - ١)$

٥٢

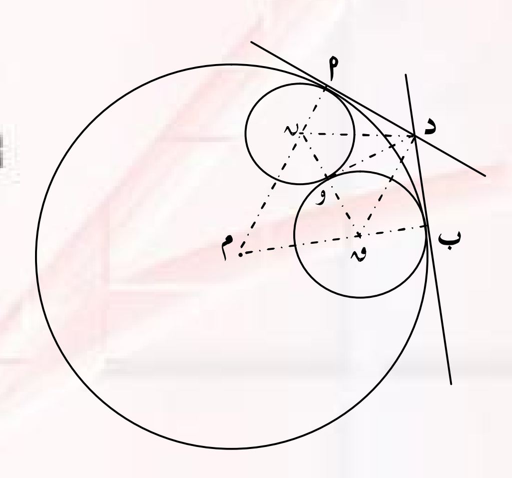
إذا كانت : (ں ، ٢) ، (ں٥ ، ٣) دائرتان متماستان من الخارج ، رسمت الدائرة (م ، نو) تمساهما من الخارج في ﻫ ، ب ، فإذا تقاطع مماسا الدائرتان ں ، ں٥ في د ، وكان : |ﻫ د| = ٤سم .

فأوجد طول نو

مسابقات الرياضيات لولاية كارولينا الشمالية – مسابقة المدارس الثانوية – ٩ مارس ٢٠٠٩

Noorth Carolina Math Competition - High School Math Constant – ٩ March ٢٠٠٩

الحل



- الدائرتان ں٥ ، ں يتماسا في نقطة و
- نصل : ﻫ ں ، ں م ، ب ں٥ ، ں٥ م ، د و ، د ں ، د ں٥

∵ ﻫ د مماس للدائرة ں ، والدائرتان م ، ں متماستان

∴ ﻫ د مماس للدائرة م

∴ النقاط ﻫ ، ں ، م على استقامة واحدة .

، وبالمثل النقاط ب ، ں٥ ، م على استقامة واحدة

∵ ﻫ د ، د و مماسان للدائرة ں من نقطة واحدة .

∴ |ﻫ د| = | د و| = ٤ سم

∴ ں د ينصف ∠ ﻫ د و

∵ نصف قطر الدائرة ں = ٢ سم

∴ ظا (½ ∠ ﻫ د و) = ٢/دو = ٢/٤ = ١/٢

، بالمثل ظا (½ ∠ و د ب) = ٣/٤ حيث نصف قطر الدائرة ں٥ = ٣

في الدائرة م ∴ ظا (½ ∠ ﻫ د ب) = نو ÷ |ﻫ د|

∴ نو = |ﻫ د| . ظا (½ ∠ ﻫ د ب)

∴ نو = ٤ ظا (½ ∠ ﻫ د ب)

$$\therefore \text{نوه} = ٤ \,\text{ظا}\, \left(\tfrac{١}{٢}\left(\angle \text{أ د و}\right) + \left(\angle \text{و د ب}\right)\right)$$

$$\therefore \text{نوه} = ٤ \,\text{ظا}\, \frac{\left(\angle \text{أ د و}\right) + \left(\angle \text{و د ب}\right)}{٢}$$

$$\therefore \text{نوه} = ٤ \times \frac{\text{ظا}\,\frac{\angle \text{أ د و}}{٢} + \text{ظا}\,\frac{\angle \text{و د ب}}{٢}}{١ - \text{ظا}\,\frac{\angle \text{أ د و}}{٢}\,\text{ظا}\,\frac{\angle \text{و د ب}}{٢}}$$

$$\therefore \text{نوه} = ٤ \times \frac{\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٤}}{١ - \frac{١}{٢} \times \frac{٣}{٤}} = ٤ \times \frac{\frac{٥}{٤}}{١ - \frac{٣}{٨}} = ٤ \times \frac{\frac{٥}{٤}}{\frac{٥}{٨}} = ٤ \times \frac{٥}{٤} \times \frac{٨}{٥} = ٨ \text{ سم}$$

٥٣

إذا كانت الدالة د(س) تحقق المعادلة : د(١ − س) + ٢ د(س) = ٣ س لكل س ∈ ح

فاوجد قيمة د(٠)

مسابقة الاولمبياد للمرحلة الثانوية – جنوب أفريقيا – التصفية الأولى – ١٨ مارس ٢٠٠٨

South African Mathematics Olympiad – Grades ١٠،١١ and ١٢ – ١٨ March ٢٠٠٨



∵ د(١ − س) + ٢ د(س) = ٣ س

نضع س = ٠

∴ د(١) + ٢ د(٠) = ٠ ---------------------------- ١

نضع س = ١

∴ د(٠) + ٢ د(١) = ٣ ---------------------------- ٢

بضرب المعادلة ١ × −٢

∴ − ٢ د(١) − ٤ د(٠) = ٠ ---------------------------- ٣

بجمع (٢) ، (٣)

∴ − ٣ د(٠) = ٣

∴ د(٠) = − ١

٥٤ اثبت أن : $\int$ ظتا^{٨} س قتا^{٦} س . ء س = $\frac{-١}{١٣}$ ظتا^{١٣} س − $\frac{٢}{١١}$ ظتا^{١١} س − $\frac{١}{٩}$ ظتا^{٩} س + ث

الحل

نفرض أن : م = $\int$ ظتا^{٨} س قتا^{٦} س ء س

من الممكن كتابة التكامل السابق على الصورة : م = $\int$ ظتا^{٨} س قتا^{٤} س قتا^{٢} س ء س

باستخدام المتطابقة المثلثية : قتا^{٢} هـ = ظتا^{٢} هـ + ١

∴ م = $\int$ ظتا^{٨} س (ظتا^{٢} هـ + ١)^{٢} قتا^{٢} س ء س

∴ م = $\int$ ظتا^{٨} س (ظتا^{٤} س + ٢ظتا^{٢} هـ + ١) قتا^{٢} س ء س

∴ م = $\int$ (ظتا^{١٢} س + ٢ظتا^{١٠} هـ + ظتا^{٨} س) قتا^{٢} س ء س

∴ م = $\int$ ظتا^{١٢} س . قتا^{٢} س ء س + $\int$ ٢ظتا^{١٠} هـ . قتا^{٢} س ء س + $\int$ ظتا^{٨} س . قتا^{٢} س ء س

نفرض أن : ص = ظتا س ∴ ء ص = − قتا^{٢} هـ ء س

بالتعويض

∴ م = −$\int$ ص^{١٢} ء ص − ٢$\int$ ص^{١٠} ء ص − $\int$ ص^{٨} ء ص

∴ م = − $\frac{١}{١٣}$ ص^{١٣} − $\frac{٢}{١١}$ ص^{١١} − $\frac{١}{٩}$ ص^{٩} + ث

بالتعويض عن ص

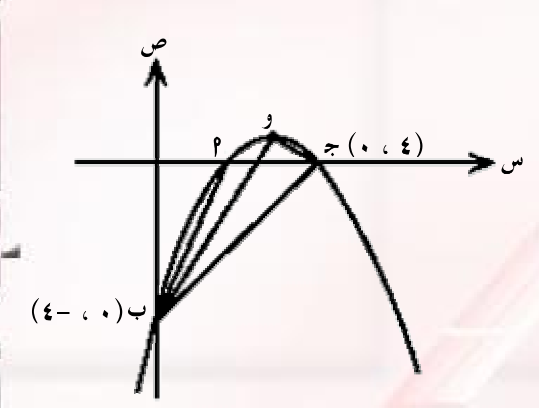
∴ م = − $\frac{١}{١٣}$ ظتا^{١٣} س − $\frac{٢}{١١}$ ظتا^{١١} س − $\frac{١}{٩}$ ظتا^{٩} س + ث

٥٥

على الشكل : النقطة (و) رأس القطع المكافئ الذي يقطع محور السينات في ٩ ، ج (٤ ، ٠) ، ومحور الصادات في ب (٠ ، -٤) إذا كانت مساحة سطح

∆ ٩ ب ج = ٤

فأوجد مساحة سطح ∆ و ب ج .



المسابقات الكندية – مسابقة إقليدس – ٧ ابريل ٢٠٠٩ م

Canadian Mathematics Competition – Euclid – ٧ April ٢٠٠٩

الحل

أولاً نفرض أن إحداثيا النقطة ٩ = (س ، ٠)

∵ مساحة سطح ∆ ٩ ب ج = ٤ ، وقاعدته ٩ ج وارتفاعه المسافة من النقطة ب حتى محور السينات

، ∵ | ٩ ج| = ٤ - س

∴ مساحة سطح ∆ ٩ ب ج = ½ × (٤ - س) × ٤

∴ ٤ = ½ × (٤ - س) × ٤

∴ ٤ = ٨ - ٢ س

∴ ٢ س = ٨ - ٤

∴ س = ٢

∴ إحداثيا النقطة ٩ = (٢ ، ٠)

ثانياً : باستخدام معادلة القطع المكافئ : (س - د)^{٢} = -٤ ٩(ص - هـ)

حيث (د ، هـ) رأس القطع والتي تمثل في الرسم نقطة و

∵ النقطتان : (٤ ، ٠) ، (٢ ، ٠) تقعان على القطع

∴ (٤ - د)^{٢} = -٤ ٩(٠ - هـ)

∴ (٤ - د)^{٢} = ٤ ٩ هـ ---------------------- ١

وكذلك

$\therefore$ (٢ - د)^٢= ٤ ﻫ ا ﻫ ------------------------ ٢

بالطرح

$\therefore$ (٤ - د)^٢ - (٢ - د)^٢= ٠

$\therefore$ ١٦ - ٨ د + د^٢ - (٤ - ٤ د + د^٢) = ٠

$\therefore$ ١٦ - ٨ د + د^٢ - ٤ + ٤ د - د^٢ = ٠

$\therefore$ ١٢ - ٤د = ٠

$\therefore$ د = ٣

$\therefore$ من المعادلة (١) : ٤ ا ﻫ = ١ ------------------------٣

$\because$ القطع تقع عليه أيضاً النقطة ب(٠ ، -٤)

$\therefore$ (٠ - د)^٢= -٤ ا (-٤ - ﻫ)

$\therefore$ (٠ - ٣)^٢= -٤ ا (-٤ - ﻫ)

$\therefore$ ٩ = ١٦ ا + ٤ ا ﻫ

من (٣) $\therefore$ ٩ = ١٦ ا + ١

$\therefore$ ١٦ ا = ٨

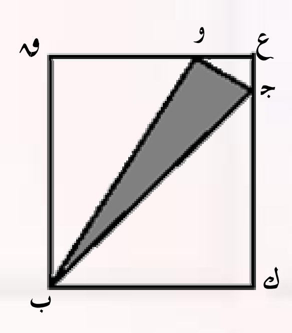
$\therefore$ ا = $\frac{١}{٢}$ ، ومنها ﻫ = $\frac{١}{٢}$

$\therefore$ احداثيا النقطة (و) رأس القطع المكافئ (٣ ، $\frac{١}{٢}$) .

ثالثاً : مساحة سطح Δ و ب جـ .

إذا اقتطعنا المثلث المطلوب إيجاد مساحته من الشكل السابق ورسمناه

بحيث تقع رؤوسه على أضلاع مستطيل.



نلاحظ أن : طول المستطيل (الواقع على محور الصادات) = ٤ +

$\frac{١}{٢} = \frac{٩}{٢}$

، عرض المستطيل = ٤

مساحة △ و جـ ب = مساحة المستطيل ع ك ب ى − مساحة [△ ب و ى + △ ع جـ و + △ جـ ك ب]

حيث مساحة المستطيل ع ك ب ى = ٤,٥ × ٤ = ١٨ سم^{٢}

، مساحة △ ب و ى = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{٩}{٢}$ × ٣ = $\frac{٢٧}{٤}$ سم^{٢}

، مساحة △ ع جـ و = $\frac{١}{٢}$ × $\frac{١}{٢}$ × ١ = $\frac{١}{٤}$ سم^{٢}

، مساحة △ جـ ك ب = $\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٤ = ٨ سم^{٢}

∴ مساحة △ و جـ ب = ١٨ − ($\frac{٢٧}{٤}$ + $\frac{١}{٤}$ + ٨)

∴ مساحة △ و جـ ب = ١٨ − ١٥ = ٣ سم^{٢}

٥٦

على الشكل : ؟ ب جـ د شبه منحرف فيه ؟ د // ب جـ ، ؟ ب ⊥ ب جـ ، ؟ ب ⊥ ؟ د ، رسم ﻫك // ؟ د ، ﻫك // ب جـ بحيث يقسم سطح شبه المنحرف لسطحين متساويين في المساحة .

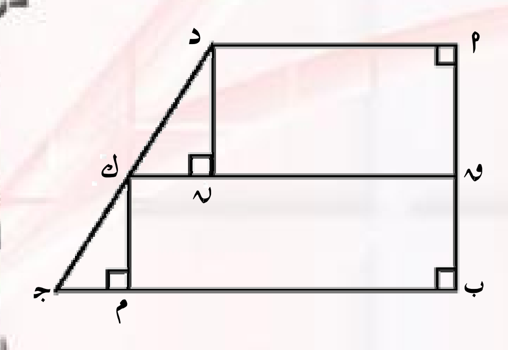
إذا كان : ؟ د = س ، ﻫك = ص ، ب جـ = ع .

أثبت أن : ٢ ص٢ = س٢ + ع٢

المسابقات الكندية – مسابقة إقليدس – ٧ ابريل ٢٠٠٩ م

Canadian Mathematics Competition – Euclid – ٧ April ٢٠٠٩

الحل



∴ ﻫك // ؟ د // ب جـ

، ∵ ؟ ب ⊥ ب جـ ، ؟ د

∴ ﻫك ⊥ ؟ ب

نسقط د ن عمودي على ﻫك ، ونسقط ك م عمودي ب جـ

∴ ؟ ﻫ ن د ، ﻫ ب م ك مستطيلان

∴ ﻫ ن = ؟ د = س

∴ ك ن = ص − س

، ∴ ب م = ﻫك = ص

∴ م جـ = ع − ص

نفرض أن : ؟ ﻫ = ر ، ﻫ ب = ح

∴ د ن = ر ، ك م = ح

∴ مساحة شبه المنحرف ؟ ﻫك د = ½ (س + ص) . ر

، مساحة شبه المنحرف ﻫ ب جـ ك = ½ (ص + ع) . ح

∵ مساحة شبه المنحرف ؟ ﻫك د = مساحة شبه المنحرف ﻫ ب جـ ك

$\therefore \frac{1}{2}(\text{س} + \text{ص}) \cdot \text{ر} = \frac{1}{2}(\text{ص} + \text{ع}) \cdot \text{ح}$

$\therefore (\text{س} + \text{ص}) \cdot \text{ر} = (\text{ص} + \text{ع}) \cdot \text{ح}$

$\therefore \frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ص} + \text{ع}} = \frac{\text{ح}}{\text{ر}}$ ---------------------------- ١

من تشابه Δ Δ د ن ك ، ك م ج

$\therefore \frac{\text{دن}}{\text{كن}} = \frac{\text{كم}}{\text{حم}}$

$\therefore \frac{\text{ر}}{\text{ص} - \text{س}} = \frac{\text{ح}}{\text{ع} - \text{ص}}$

$\therefore \frac{\text{ع} - \text{ص}}{\text{ص} - \text{س}} = \frac{\text{ح}}{\text{ر}}$ ---------------------------- ٢

من (١) ، (٢)

$\therefore \frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ص} + \text{ع}} = \frac{\text{ع} - \text{ص}}{\text{ص} - \text{س}}$

$\therefore (\text{س} + \text{ص})(\text{ص} - \text{س}) = (\text{ص} + \text{ع})(\text{ع} - \text{ص})$

$\therefore \text{ص}^2 - \text{س}^2 = \text{ع}^2 - \text{ص}^2$

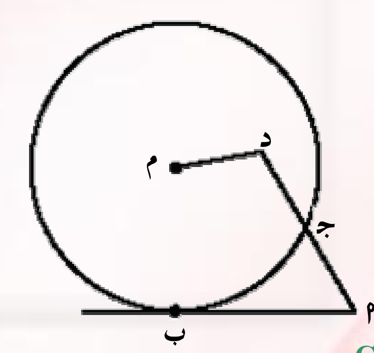
$\therefore 2\,\text{ص}^2 = \text{س}^2 + \text{ع}^2$

٥٧

على الشكل : أ ب مماس للدائرة (م ، نق) ، النقطة د تقع داخل الدائرة ، رسم أ د فقطع الدائرة في ج .

إذا كان | أ ب| = س ، | أ ج| = |ج د| = | د م| = ص

فاثبت أن : ص^{٢} = س^{٢} + نق^{٢}



المسابقات الكندية – مسابقة إقليدس – ٧ ابريل ٢٠٠٩ م

Canadian Mathematics Competition – Euclid – ٧ April ٢٠٠٩



الحل


نصل : م ب ، م أ ، م ج

∵ أ ب مماس للدائرة م

∴ م ب ⊥ أ ب

∴ بتطبيق نظرية فيثاغورث على Δ أ ب م

∴ | أ م|^{٢} = | أ ب |^{٢} + | ب م |^{٢}

∴ | أ م|^{٢} = نق^{٢} + س^{٢} ------------------- ١

في Δ م د ج : ∵ | د ج| = | د م| = ص ، م ج = نق

∵ | م ج|^{٢} = | د م|^{٢} + | ج د|^{٢} − ٢ | د م| . | ج د| جتا (∠ م د ج) .

∴ نق^{٢} = ص^{٢} + ص^{٢} − ٢ ص^{٢} جتا (∠ م د ج) .

∴ نق^{٢} = ٢ص^{٢} − ٢ ص^{٢} جتا (∠ م د ج) .

∴ ٢ ص^{٢} جتا (∠ م د ج) = ٢ص^{٢} − نق^{٢} .

∴ جتا (∠ م د ج) = (٢ص^{٢} − نق^{٢}) / (٢ص^{٢})

في Δ أ م د

∵ | أ م|^{٢} = | د م|^{٢} + | أ د|^{٢} − ٢ | د م| . | أ د| جتا (∠ م د أ) .

∴ | أ م|^{٢} = ص^{٢} + (٢ص)^{٢} − ٢ (ص) . (٢ص) جتا (∠ م د أ) .

∴ |أم|^{٢} = ص^{٢} + ٤ص^{٢} − ٤ص^{٢} جتا (∠م د أ) .

∴ |أم|^{٢} = ٥ ص^{٢} − ٤ص^{٢} جتا (∠م د أ) .

∵ ∠ م د ج = ∠ م د أ

∴ جتا (∠م د ج) = جتا (∠م د أ)

∴ |أم|^{٢} = ٥ ص^{٢} − ٤ص^{٢} . $\frac{\text{٢ص}^{٢}-\text{نو}^{٢}}{\text{٢ص}^{٢}}$

∴ |أم|^{٢} = ٥ ص^{٢} − ٢ (٢ ص^{٢} − نو^{٢})

∴ |أم|^{٢} = ٥ ص^{٢} − ٤ص^{٢} + ٢ نو^{٢}

∴ |أم|^{٢} = ص^{٢} + ٢ نو^{٢} -------------------------٢

من (١) ، (٢)

∴ نو^{٢} + س^{٢} = ص^{٢} + ٢ نو^{٢}

∴ س^{٢} = ص^{٢} + نو^{٢}

٥٨

إذا كان : $\bigcirc_{٢}$س ، $(1+\bigcirc_{٤}\text{س})$ ، $\bigcirc_{٨}$٤س هي حدود متوالية في متتابعة هندسية ، أوجد قيم س الممكنة .

المسابقات الكندية – مسابقة إقليدس – ٧ ابريل ٢٠٠٩ م

Canadian Mathematics Competition – Euclid – ٧ April ٢٠٠٩

الحل

أولاً : سنحول جميع اللوغاريتمات الواردة في المشكلة إلى لوغاريتمات ذات أساس ٢

$$\therefore\ 1+\bigcirc_{٤}\text{س} = 1+\frac{\bigcirc_{٢}\text{س}}{\bigcirc_{٢}٤} = 1+\frac{\bigcirc_{٢}\text{س}}{٢} = 1+\frac{١}{٢}\bigcirc_{٢}\text{س}$$

$$\therefore\ \bigcirc_{٨}٤\text{س} = \frac{\bigcirc_{٢}٤\text{س}}{\bigcirc_{٢}٨} = \frac{\bigcirc_{٢}٤+\bigcirc_{٢}\text{س}}{٣} = \frac{٢}{٣}+\frac{١}{٣}\bigcirc_{٢}\text{س}$$

نفرض أن : ص = $\bigcirc_{٢}$س

∴ حدود المتتابعة الثلاثة = ص ، ١ + $\frac{١}{٢}$ص ، $\frac{٢}{٣}+\frac{١}{٣}$ص

$$\therefore\ \frac{١+\frac{١}{٢}\text{ص}}{\frac{٢}{٣}+\frac{١}{٣}\text{ص}} = \frac{\text{ص}}{١+\frac{١}{٢}\text{ص}}$$

$$\therefore\ \left(١+\frac{١}{٢}\text{ص}\right)^{٢} = \text{ص}\left(\frac{٢}{٣}+\frac{١}{٣}\text{ص}\right)$$

∴ ١ + ص + $\frac{١}{٤}$ص^{٢} = $\frac{٢}{٣}$ص + $\frac{١}{٣}$ص^{٢} بالضرب × ١٢

∴ ١٢ + ١٢ص + ٣ص^{٢} = ٨ص + ٤ ص^{٢}

∴ ٨ص + ٤ ص^{٢} –٣ص^{٢} –١٢ ص – ١٢ = ٠

∴ ص^{٢} –٤ ص – ١٢ = ٠

∴(ص – ٦)(ص + ٢) = ٠

∴ ص = $\bigcirc_{٢}$س = ٦



∴ س = $٢^{٦}$ = ٦٤

، ص = ○$_{٢}$س = − ٢

∴ س = $٢^{-٢}$ = $\frac{١}{٤}$

٥٩

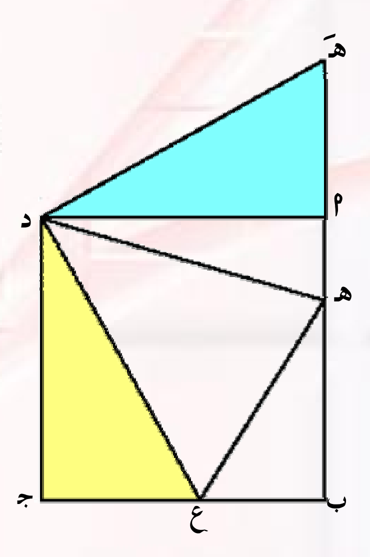
على الشكل : ٱ ب جـ د مربع طول ضلعه ٤ سم ، النقطتان هـ ، ع تقعان على ضلعيه ٱ ب ، ب جـ بحيث قياس ∠ هـ د ع = ٤٥°.

أوجد أكبر قيمة ممكنة لمحيط △ هـ ب ع .

المسابقات الكندية – مسابقة إقليدس – ٧ ابريل ٢٠٠٩ م

Canadian Mathematics Competition – Euclid – ٧ April ٢٠٠٩

الحل



بدوران △ دعجـ بزاوية ٩٠° عكس عقارب الساعة حول الرأس د

نحصل على △ دهـَٱ (لاحظ أن هـَ على ب‍ٱ⃖)

∴ د ع = د هـَ

، ∴ ∠ هـ د هـَ = ∠ هـَ د ٱ + ∠ ٱ د هـ = ∠ جـ د ع + ∠ ٱ د هـ

= ٩٠° – ∠ ع د هـ

= ٩٠° – ٤٥° = ٤٥°.

∴ △ هـ د ع يطابق △ هـَ د هـ (ضلعين وزاوية محصورة)

∵ محيط △ هـ ب ع = ب ع + ب هـ + هـ ع

∴ ب ع + ب هـ + هـ ع = ب ع + ب هـ + هـ هـَ

= ب ع + ب هـ + (هـ ٱ + ٱ هـَ)

= ب ع + (ب هـ + هـ ٱ) + ٱ هـَ

= ب ع + ٱ ب + ٱ هـَ

= ب ع + ٱ ب + ع جـ

= ٱ ب + (ب ع + ع جـ)

= ٱ ب + ب جـ = ٤ + ٤ = ٨

٦٠

إذا كان : أ ، ب ، س ، ص ∋ ح بحيث : أ س + ب ص = ٣ ، أ س^{٢} + ب ص^{٢} = ٧ ،
أ س^{٣} + ب ص^{٣} = ١٦ ، أ س^{٤} + ب ص^{٤} = ٤٢ . أوجد قيمة أ س^{٥} + ب ص^{٥}

المسابقة السنوية الثانية عشرة لمعهد هارفارد – ٢١ فبراير ٢٠٠٩ – مسابقات ولاية ماساتشوستس الأمريكية

Harvard-MIT Annual- ٢١ February ٢٠٠٩ - Massachusetts Math Competitions

١٢thMathematics Tournament

الحل

∵ أ س^{٣} + ب ص^{٣} = ١٦ بضرب الطرفين في (س + ص)

∴ (أ س^{٣} + ب ص^{٣})(س + ص) = ١٦(س + ص)

∴ أ س^{٤} + أ س^{٣}ص + ب ص^{٣} س + ب ص^{٤} = ١٦(س + ص)

∴ أ س^{٤} + ب ص^{٤} + س ص (أ س^{٢} + ب ص^{٢}) = ١٦(س + ص)

ولكن : أ س^{٤} + ب ص^{٤} = ٤٢ ، أ س^{٢} + ب ص^{٢} = ٧

∴ ٤٢ + ٧ س ص = ١٦(س + ص) ———————— ١

∵ أ س^{٢} + ب ص^{٢} = ٧ بضرب الطرفين في (س + ص)

∴ (أ س^{٢} + ب ص^{٢})(س + ص) = ٧ (س + ص)

∴ أ س^{٣} + أ س^{٢}ص + ب ص^{٢} س + ب ص^{٣} = ١٦(س + ص)

∴ أ س^{٣} + ب ص^{٣} + س ص(أ س + ب ص) = ١٦(س + ص)

ولكن : أ س^{٣} + ب ص^{٣} = ١٦ ، أ س + ب ص = ٣

∴ ١٦ + ٣ س ص = ٧ (س + ص) ———————— ٢

بضرب المعادلة (١) × ٣ ، وضرب المعادلة (٢) × −٧ والجمع معا

١٢٦ +٢١ س ص = ٤٨(س + ص)

−١١٢ − ٢١ س ص = − ٤٩ (س + ص)

∴ ١٤ = − (س + ص)

∴ س + ص = −١٤

بالتعويض في (٢)

∴ ١٦ + ٣ س ص = ٧ × −١٤

∴ ١٦ + ٣ س ص = − ٩٨

∴ ٣ س ص = − ٩٨ − ١٦

∴ ٣ س ص = − ١١٤

∴ س ص = − ٣٨

∵ ٢ س^٤ + ب ص^٤ = ٤٢ بضرب الطرفين في (س + ص)

∴ (٢ س^٤ + ب ص^٤) (س + ص) = ٤٢ (س + ص)

∴ ٢ س^٥ + ٢ س^٤ ص + ب ص^٤ س + ب ص^٥ = ٤٢ (س + ص)

∴ ٢ س^٥ + ب ص^٥ + س ص (٢ س^٣ + ب ص^٣) = ٤٢ (س + ص)

∴ ٢ س^٥ + ب ص^٥ + (−٣٨) (١٦) = ٤٢ (−١٤)

∴ ٢ س^٥ + ب ص^٥ = ٤٢ (− ١٤) − (− ٣٨) (١٦)

∴ ٢ س^٥ + ب ص^٥ = − ٥٨٨ + ٦٠٨

∴ ٢ س^٥ + ب ص^٥ = ٢٠

٦١

على الشكل١ : ٩ ب ـ جـ د هـ و منشور ثلاثي قائم ارتفاعه ١٦ سم ، وقاعدته مثلث متطابق الأضلاع ، طول ضلعه ١٢ سم ، أخذت النقاط ، س ، ص ، ع منتصفات الأحرف ٩ هـ ، ٩ ب ، ٩ جـ على الترتيب .

أولاً : أوجد أطوال كل من س ص ، س ع، ص ع

ثانياً : أوجد المساحة السطحية للمجسم ٩ س ص ع

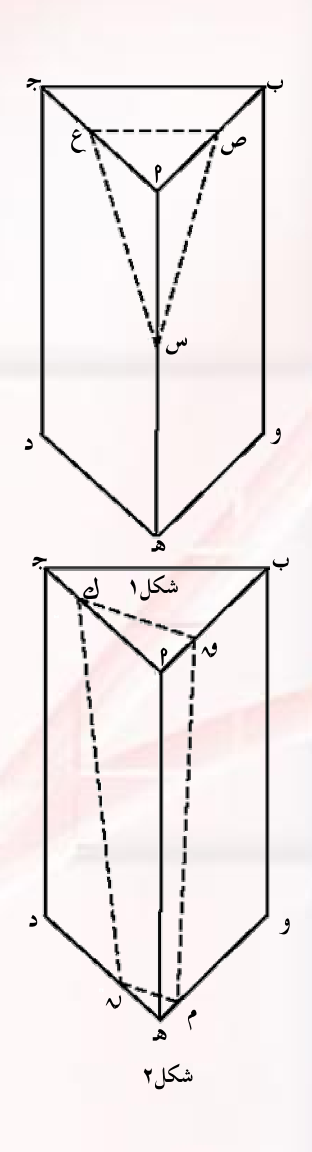
ثالثاً : على الشكل ٢ : إذا كانت النقاط : ى، ك،م، ن تقع على الأحرف ٩ ب، ٩ جـ ، و هـ ، هـ د على الترتيب

بحيث : | هـ ن| = ٤ سم ، | هـ م|= ٢ سم ، | ٩ ك|= ٨ سم

أوجد حجم المجسم ك ى ٩ هـ ن م .

المسابقات الكندية – مسابقة هايباتا – ٨ ابريل ٢٠٠٩ م

Canadian Mathematics Competition –Hypatia –٨ April ٢٠٠٩



الحل

أولاً :

∵ ٩ ب جـ △ متطابق الأضلاع ، طول ضلعه ١٢ سم

، ∵ ص ، ع منتصفات ضلعيه ٩ ب ، ٩ جـ على الترتيب .

∴ | ص ع| = $\frac{1}{2}$ | ب جـ| = ٦ سم

بالمثل

| س ع| = $\frac{1}{2}$ | هـ جـ| = $\frac{1}{2}$ × ٢٠ = ١٠ (باستخدام نظرية فيثاغورث على المثلث القائم جـ ٩ هـ)

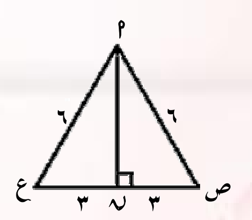
، | ص س| = $\frac{1}{2}$ | ب هـ| = $\frac{1}{2}$ × ٢٠ = ١٠ (باستخدام نظرية فيثاغورث على المثلث القائم ب ٩ هـ)

ثانياً :

في △ أ ع س القائم في ∠ أ

∵ |أ ع| = ٦ ، |أ س| = ٨

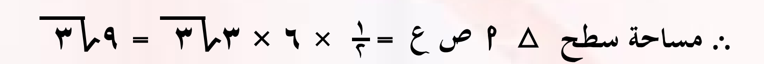
∴ مساحة سطح △ أ ع س = ½ × ٦ × ٨ = ٢٤



بالمثل مساحة سطح △ أ ص س = ½ × ٦ × ٨ = ٢٤

من الشكل المجاور يتضح طريقة إيجاد مساحة سطح △ أ ص ع

|أ ن| = √(٣٦ − ٩) = √٢٧ = ٣√٣



∴ مساحة سطح △ أ ص ع = ½ × ٦ × ٣√٣ = ٩√٣

وللحصول على مساحة △ س ص ع ومن الرسم التالي :-

|أ م| = √(١٠٠ − ٩) = √٩١

∴ مساحة سطح △ س ص ع = ½ × ٦ × √٩١ = ٣√٩١

∴ المساحة السطحية للمجسم أ س ص ع = ٢٤ + ٢٤ + ٩√٣ + ٣√٩١

= ٤٨ + ٩√٣ + ٣√٩١

ثالثاً :

في △ م هـ ن ∵ |هـ ن| = ٤ سم ، |هـ م| = ٢ سم

∴ |هـ م| = $\frac{1}{2}$ |هـ ن|

∵ △ و هـ د مثلث متطابق الأضلاع

∴ ∠ م هـ د = ٦٠°

∴ △ م هـ ن مثلث ثلاثيني ستيني

∴ ن م ⊥ و هـ

∴ |م ن| = $\sqrt{16-4}$ = $\sqrt{12}$ = ٢$\sqrt{3}$

، ∴ |م هـ| = ٢

∵ ن م ⊥ و هـ

، ∵ م ن ⊂ المستوى ل ن م ق

∴ ق ل ⊥ المستوى ا هـ و ب

∴ ق ل ⊥ ا ب

في △ ا ق ل ∵ ∠ ق ا ل = ٦٠°

∴ △ ا ق ل مثلث ثلاثيني ستيني

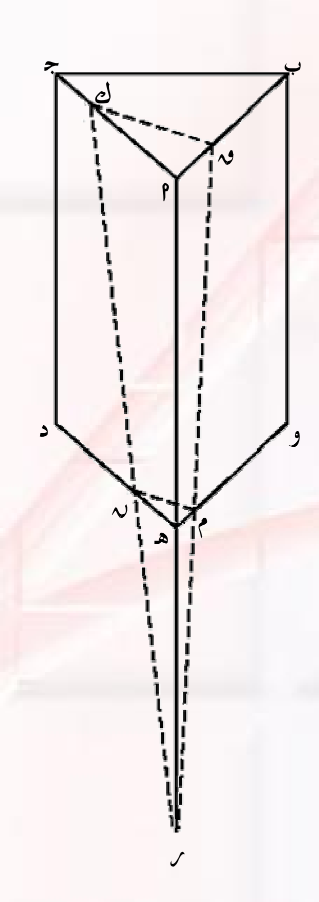
∵ |ا ل| = ٨ سم

∴ |ا ق| = ٤ سم

∴ |ل ق| = $\sqrt{64-16}$ = $\sqrt{48}$ = ٤$\sqrt{3}$

نمد ا هـ ، ل ن ، ق م ليتلاقوا في ر

في △△ ر ن هـ ، ر ل ا



∠ ر مشتركة ، ∠ك ٩ ر = ∠ ں هـ ر = ٩٠°

∴ △ △ ر ں هـ ، ر ك ٩ متشابهان

∵ |ك ٩| = ٨ ، |ں هـ| = ٤

∴ نسبة التشابه = ٢ : ١

∴ ر ٩ = ٢ ر هـ

∴ |٩ هـ| = |هـ ر| = ١٦

∴ |٩ ر| = ٣٢

وللحصول على حجم الجسم ك ں ٩ هـ ں م نلاحظ أن :

الحجم المطلوب = حجم الهرم الثلاثي القائم ر ٩ ںك − حجم الهرم الثلاثي القائم ر م هـ ں

∵ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

∴ حجم الهرم الثلاثي القائم ر ٩ ںك = $\frac{١}{٣}$ ($\frac{١}{٢}$. ٩ ں . ك ں) × ٩ ر

∴ حجم الهرم الثلاثي القائم ر ٩ ںك = $\frac{١}{٣}$ ($\frac{١}{٢}$ × ٤ × ٤ $\sqrt{٣}$) × ٣٢ = $\frac{٢٥٦ \sqrt{٣}}{٣}$ سم^{٣}

، حجم الهرم الثلاثي القائم ر م هـ ں = $\frac{١}{٣}$ ($\frac{١}{٢}$. ں م . ں هـ) × هـ ر

∴ حجم الهرم الثلاثي القائم ر م هـ ں = $\frac{١}{٣}$ ($\frac{١}{٢}$ × ٢ × ٢ $\sqrt{٣}$) × ١٦ = $\frac{٣٢ \sqrt{٣}}{٣}$ سم^{٣}

∴ حجم الجسم ك ں ٩ هـ ں م = $\frac{٢٥٦ \sqrt{٣}}{٣}$ − $\frac{٣٢ \sqrt{٣}}{٣}$ = $\frac{٢٢٤ \sqrt{٣}}{٣}$ سم^{٣}

٦٢

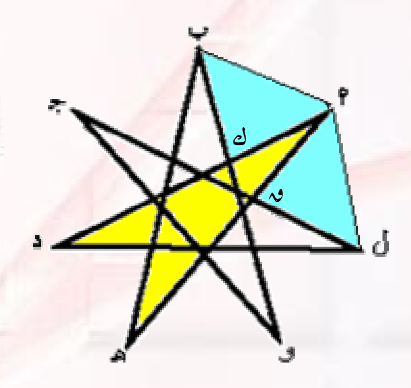
على الشكل : أ ب جـ د هـ و ل سباعي منتظم ، رسمت النجمة أ هـ ب و جـ ل د بحيث تساوي الزاوية المنفرجة بين أ هـ ، جـ ل $= \frac{م}{ن}$ حيث م ، ن عددان موجبان أوليان فيما بينهما .

أوجد : م + ن

مسابقات ولاية ويسكنسون الأمريكية للمدارس الثانوية لقاء ابريل ٢٠٠٩ – برعاية جامعة ويسكنسون

University of Wisconsin –Whitewater -High School Mathematics MeetApril ٢٠٠٩





نفرض أن : ن نقطة تقاطع أ هـ ، ل جـ

∴ الزاوية المنفرجة بين أ هـ ، ل جـ هي : ∠ أ ن جـ

∵ رؤوس السباعي المنتظم تقع على محيط دائرة واحدة

∴ قياس القوس الأصغر هـ د $= \frac{٣٦٠}{٧}$

∴ ∠ هـ أ د $= \frac{\frac{٣٦٠}{٧}}{٢} = \frac{١٨٠}{٧}$

∵ ∠ ب أ ل (زاوية رأس السباعي) $= \frac{١٨٠ \times (٧ - ٢)}{٧} = \frac{١٨٠ \times ٥}{٧}$

∵ ∠ أ ن جـ = ∠ ن أ ل + ∠ ن ل أ

ومن تطابق Δ Δ أ ن ل ، أ ك ب

∴ ∠ ن ل أ = ∠ ك أ ب

∴ ∠ أ ن جـ = ∠ ن أ ل + ∠ ك أ ب

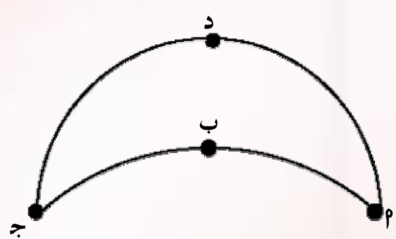
= ∠ ب أ ل - ∠ هـ أ د

$= \frac{١٨٠ \times ٥}{٧} - \frac{١٨٠}{٧} = \frac{٧٢٠}{٧} = \frac{م}{ن}$

∴ م + ن = ٧٢٠ + ٧ = ٧٢٧

٦٣

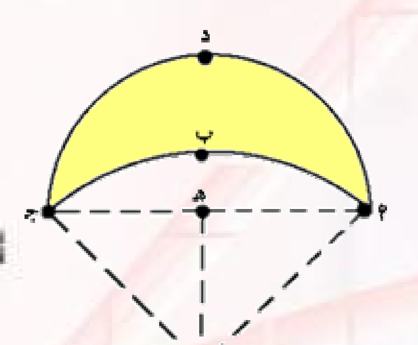
الشكل ﻫ ب ج د مكون من ﻫ د ج نصف دائرة ، ﻫ ب ج ربع دائرة ، إذا كانت المسافة بين ﻫ ، ج تساوي ١٨ سم .
احسب مساحة الشكل ﻫ ب ج د



مسابقات ولاية ويسكنسون الأمريكية للمدارس الثانوية لقاء ابريل ٢٠٠٩ – برعاية جامعة ويسكنسون

University of Wisconsin –Whitewater -High School Mathematics Meet April ٢٠٠٩

الحل



نفرض أن : ﻫ مركز نصف الدائرة ﻫ د ج

م مركز ربع الدائرة ﻫ ب ج

نصل : ﻫ ج ، ﻫ م ، جم ، ﻫ م

نلاحظ أن

مساحة الشكل المطلوب =مساحة نصف الدائرة ﻫ ﻫ ج د + مساحة Δ ﻫ م ج – مساحة ربع الدائرة ﻫ م ج ب .

∵ مساحة نصف الدائرة ﻫ ﻫ ج د = $\frac{١}{٢}$ ط × ٩^{٢} = $\frac{٨١}{٢}$ ط سم^{٢}

، ∵ ﻫ م نصف قطر ربع الدائرة = ٩$\sqrt{٢}$

∴ مساحة ربع الدائرة ﻫ م ج ب = $\frac{١}{٤}$ ط × (٩$\sqrt{٢}$)^{٢} = $\frac{٨١}{٢}$ ط سم^{٢}

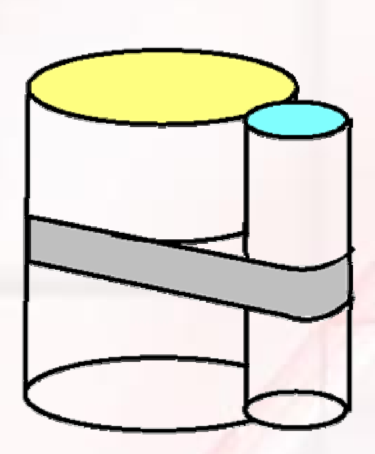
، ∵ مساحة Δ ﻫ م ج = $\frac{١}{٢}$ × ١٨ × ٩ = ٨١ سم^{٢}

∴ مساحة الشكل المطلوب = $\frac{٨١}{٢}$ ط + ٨١ سم^{٢} – $\frac{٨١}{٢}$ ط =

٨١ سم^{٢}

٦٤

اسطوانتان قائمتان نصفي قطري قاعدتيهما ١٢ ، ٣٦ متلامستان تم ربطهما بحزام طوله = م$\sqrt{\text{س}}$ + ن π حيث م ، س ، ن أعداد صحيحة موجبة . أوجد م + س + ن



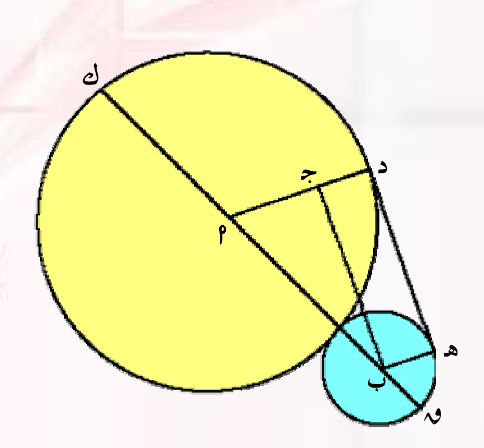
مسابقات ولاية ويسكنسون الأمريكية للمدارس الثانوية لقاء ابريل ٢٠٠٩ – برعاية جامعة ويسكنسون

University of Wisconsin –Whitewater -High April ٢٠٠٩ School Mathematics Meet

الحل

نأخذ مقطع أفقي لكامل المجسم كما بالشكل حيث : م ، ب مركزي قاعدتي الاسطوانتين ، ن ، ك نقطتين تقعان على محيطي المقطع ، ن ك يمر بالمركزين

النقطتان د ، هـ نقطتي تلامس الحزام مع الاسطوانتين .



∴ ب هـ ⊥ د هـ ، م د ⊥ د هـ (حيث ب هـ ، م د نصفي قطر قاعدتي الاسطوانتين الصغرى والكبرى على الترتيب).

نفرض ج تقع على م د بحيث ب ج // هـ د

∴ الشكل ب هـ د ج مستطيل .

∴ | ب هـ | = | د ج | = ١٢

∴ | م ج | = ٣٦ – ١٢ = ٢٤

∴ | م ب | = ٣٦ + ١٢ = ٤٨

في △ م ب ج القائم في ∠ ج ∵ | م ب | = ٤٨ ، | م ج | = ٢٤

∴ | م ج | = $\frac{1}{2}$ | م ب |

∴ △ م ب ج مثلث ثلاثين ستيني

∴ ∠ م ب ج = ٣٠° ، ∠ ب م ج = ٦٠°

∴ | ب ج | = ٢٤$\sqrt{٣}$

∴ | د هـ | = ٢٤ $\sqrt{٣}$

∵ طول الحزام = ضعف القوس الأصغر هـ و + ضعف القوس الأصغر د ك + ٢ | د هـ |

، ∵ قياس $\overset{\frown}{\text{هـ و}}$ = قياس ∠ و ب هـ المركزية = ١٨٠° − (٩٠° + ٣٠°) = ٦٠°

∴ طول $\overset{\frown}{\text{هـ و}}$ = $\frac{١}{٦}$ طول محيط قاعدة الأسطوانة الصغرى = $\frac{١}{٦}$ × ٢ × ١٢ × π = ٤ π

بالمثل :

، ∵ قياس $\overset{\frown}{\text{د ك}}$ = قياس ∠ د م ك المركزية = ١٨٠° − ٦٠° = ١٢٠°

∴ طول $\overset{\frown}{\text{د ك}}$ = $\frac{١}{٣}$ طول محيط قاعدة الأسطوانة الكبرى= $\frac{١}{٣}$ × ٢ × ٣٦ × π = ٢٤ π

∴ طول الحزام = ٢ × ٤ π + ٢ × ٢٤ π + ٢ × ٢٤ $\sqrt{٣}$ = ٨ π + ٤٨ π + ٤٨ $\sqrt{٣}$

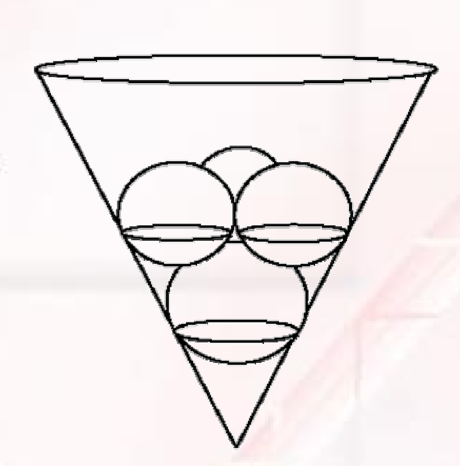
= ٤٨ $\sqrt{٣}$ + ٥٦ π = م $\sqrt{\text{س}}$ + ن π

∴ م + س + ن = ٤٨ + ٣ + ٥٦ = ١٠٧

٦٥

مخروط دائري قائم مقلوب زاوية رأسه ٦٠° ، وضعت داخله الكرة (ر) والتي نصف قطرها ١ وتلامس جوانب المخروط ، تم وضعت ثلاث كرات لها نفس الحجم فوق الكرة (ر) داخل المخروط بحيث تتلامس الكرات الأربعة وجدار المخروط ، إذا كان نصف قطر الكرات الثلاثة على الصورة $\frac{ى + \sqrt{ج}}{ك}$

حيث: ى ، ج ، ك ∈ ص$^+$ أوجد: ى + ج + ك

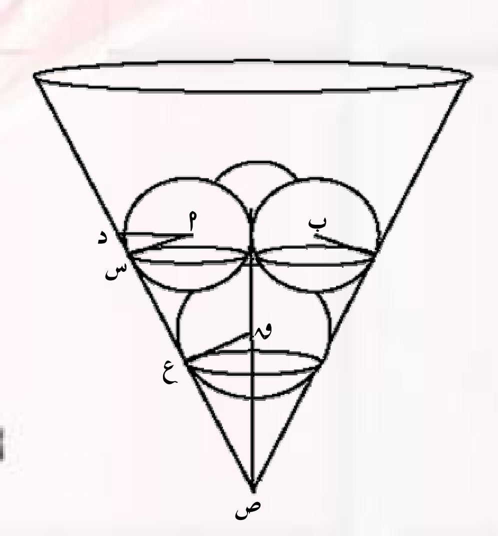


مسابقات ولاية ويسكنسون الأمريكية للمدارس الثانوية لقاء ابريل ٢٠٠٩ – برعاية جامعة ويسكنسون

University of Wisconsin –Whitewater -High School Mathematics Meet April ٢٠٠٩

الحل

نفرض أن : م مركز الكرة (ر) . أ ، ب ، هـ مراكز الكرات الثلاثة المتماثلة في الحجم ، النقطة (و) نقطة تقاطع متوسطات △ أ ب هـ ، ح مسقط ب على أ هـ ، و أ ∩ المخروط = {د} ، الكرة التي مركزها أ تمس المخروط في س ، ع نقطة تماس الكرة (ر) مع المخروط ، ص هي رأس المخروط .



، ونفرض أن نصف قطر الكرات المتماثلة = نق

∵ زاوية رأس المخروط = ٦٠°

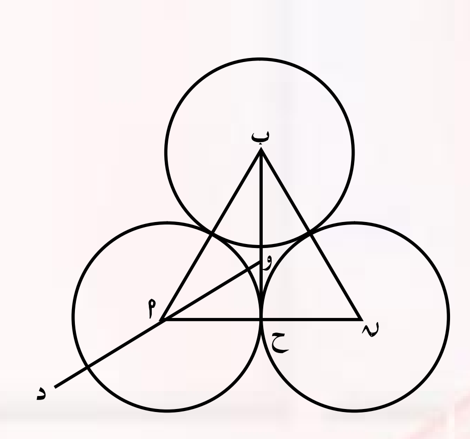
∴ ∠ م ص ع = ٣٠°

، ∵ م ع ⊥ ص ع

∴ △ م ص ع مثلث ثلاثيني ستيني

∵ | م ع | = ١

∴ | م ص | = ٢



∴ Δ ٢ س د مثلث ثلاثيني ستيني أيضاً

∴ | ٢ د | = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$نو ---------------------- ١

∴ Δ ٢ ب ـه متطابق الأضلاع وطول ضلعه = ٢ نو

∴ |ب ح |= نو $\sqrt{٣}$

∵ النقطة (و) نقطة تقاطع متوسطات Δ ٢ ب ـه

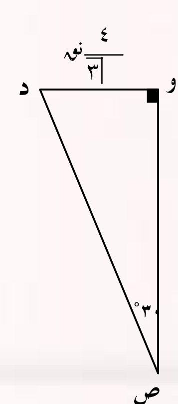
∴ (و) تقسم ب ح بنسبة ١ : ٢من جهة القاعدة

∴ |و ح| = $\frac{نو\sqrt{٣}}{٣}$

∴ من نظرية فيثاغورث |٢و| = $\sqrt{نو^٢ + \frac{نو^٢}{٣}}$ = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$نو ---------------------- ٢

من (١) ، (٢)

∴ |و د| = $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$نو + $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$نو = $\frac{٤}{\sqrt{٣}}$نو



∵ Δ ص د و مثلث ثلاثيني ستيني حيث ∠ ص و د قائمة

∴ | ص و | = $\sqrt{\left(\frac{٨نو}{\sqrt{٣}}\right)^٢ - \left(\frac{٤نو}{\sqrt{٣}}\right)^٢}$ = $\sqrt{\frac{٦٤نو^٢}{٣} - \frac{١٦نو^٢}{٣}}$

= $\sqrt{\frac{٤٨نو^٢}{٣}}$ = $\sqrt{١٦نو^٢}$ = ٤ نو

∴ |و ٯ| = ٤ نو – ٢

∵ | ٢ ٯ| = نو + ١   (مجموع نصفي قطر كرة صغيرة + الكرة الكبيرة)

في Δ ٢و ٯ القائم في ∠ و

∵ | ٢ ٯ|^٢=|و ٯ|^٢+| ٢و|^٢

∴ (نو + ١)^٢ = (٤ نو – ٢)^٢ + $\left(\frac{٢}{\sqrt{٣}}نو\right)^٢$

∴ س^{٢} + ٢ س + ١ = ١٦ س^{٢} − ١٦ س + ٤ + $\frac{٤}{٣}$ س^{٢}

∴ ١٥ س^{٢} − ١٨ س + ٣ + $\frac{٤}{٣}$ س^{٢} = ٠   بالضرب × ٣

∴ ٤٥ س^{٢} − ٥٤ س + ٩ + ٤ س^{٢} = ٠

∴ ٤٩ س^{٢} − ٥٤ س + ٩ = ٠

باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية

∴ س = $\frac{٢٧ \pm \sqrt{٢٨٨}}{٤٩}$ = $\frac{ى + \sqrt{ج}}{ك}$

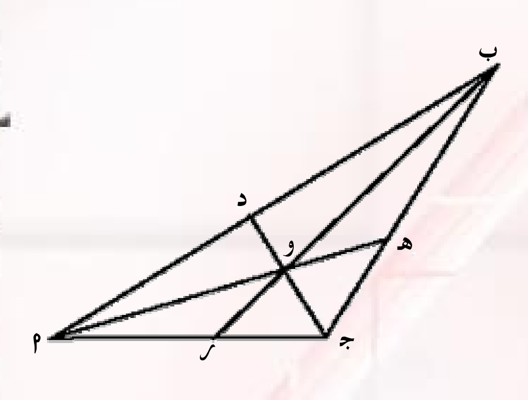
∴ ى + ج + ك = ٢٧ + ٢٨٨ + ٤٩ = ٣٦٤

٦٦

على الشكل : أ ب ج مثلث فيه : ج د ⊥ أ ب ، أ هـ ينصف ∠ ب أ ج ، أ هـ ∩ ج د = {و} ، $\overleftrightarrow{\text{ب و}}$ ∩ أ ج = {ر}

إذا كان : |أ ب| = ٢٨ ، |أ ج| = ١٤ ، |ج د| = ١٠ فإننا نستطيع كتابة |ج ر| على الصورة $\frac{\text{ك} - \text{م}\sqrt{\text{ه}}}{\text{ن}}$ حيث ك ، م ، ه ، ن ∈ ص$^+$. أوجد :

ك − م + ه + ن



مسابقات ولاية ويسكنسون الأمريكية للمدارس الثانوية لقاء ابريل ٢٠٠٩ – برعاية جامعة ويسكنسون

University of Wisconsin –Whitewater -High School Mathematics Meet April ٢٠٠٩



باستخدام نظرية فيثاغورث في △ القائم أ د ج

∵ |أ ج| = ١٤ ، |ج د| = ١٠

∴ |أ د| = $\sqrt{١٤^٢ - ١٠^٢} = \sqrt{١٩٦ - ١٠٠} = \sqrt{٩٦} = ٤\sqrt{٦}$

∵ |أ ب| = ٢٨

∴ |ب د| = ٢٨ − ٤$\sqrt{٦}$

∵ أ هـ ينصف ∠ ب أ ج وباستخدام نظرية منصف الزاوية

∴ $\frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ج}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}} = \frac{٢٨}{١٤} = ٢$

باستخدام نظرية شيفا (انظر الملاحظة في نهاية المشكلة)

∴ $\frac{\text{أ د}}{\text{د ب}} \cdot \frac{\text{ب هـ}}{\text{هـ ج}} \cdot \frac{\text{ج ر}}{\text{ر أ}} = ١$

∴ $\frac{٤\sqrt{٦}}{٢٨ - ٤\sqrt{٦}} \times ٢ \times \frac{\text{حر}}{١٤ - \text{حر}} = ١$

∴ $\frac{٤\sqrt{٦}}{١٤ - ٢\sqrt{٦}} \times \frac{\text{حر}}{١٤ - \text{حر}} = ١$

$$\therefore \frac{٤\sqrt{٦}}{١٤-٢\sqrt{٦}} = \frac{١٤-حر}{حر}$$

$$\therefore ١٤-حر = \frac{٢\sqrt{٦}}{٧-\sqrt{٦}} \times جر$$

$$\therefore ١٤ = \frac{٢\sqrt{٦}}{٧-\sqrt{٦}} \times جر + جر$$

$$\therefore ١٤ = جر\left(\frac{٢\sqrt{٦}}{٧-\sqrt{٦}}+١\right)$$

$$\therefore جر = \frac{١٤}{\left(\frac{٢\sqrt{٦}}{٧-\sqrt{٦}}+١\right)} = \frac{١٤}{\left(\frac{٢\sqrt{٦}}{٧-\sqrt{٦}}+١\right)} = \frac{١٤}{\left(\frac{٢\sqrt{٦}}{٧-\sqrt{٦}}+\frac{٧-\sqrt{٦}}{٧-\sqrt{٦}}\right)} = \frac{١٤}{\left(\frac{٢\sqrt{٦}+٧-\sqrt{٦}}{٧-\sqrt{٦}}\right)} = \frac{١٤}{\left(\frac{\sqrt{٦}+٧}{٧-\sqrt{٦}}\right)}$$

$$= ١٤ \times \frac{٧-\sqrt{٦}}{\sqrt{٦}+٧}$$

بالضرب في المرافق

$$\therefore جر = ١٤ \times \left(\frac{٧-\sqrt{٦}}{٧+\sqrt{٦}} \times \frac{٧-\sqrt{٦}}{٧-\sqrt{٦}}\right) = ١٤ \times \left(\frac{٤٩-١٤\sqrt{٦}+٦}{٤٩-٦}\right) = ١٤ \times \left(\frac{٥٥-١٤\sqrt{٦}}{٤٣}\right) = \frac{٧٧٠-١٩٦\sqrt{٦}}{٤٣}$$

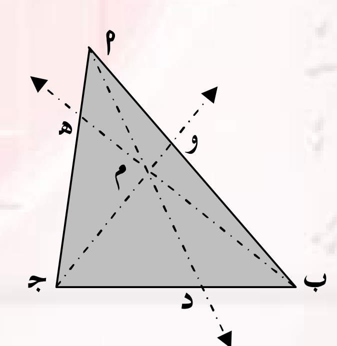
$$\therefore \frac{ك-م\sqrt{و}}{ن} = \frac{٧٧٠-١٩٦\sqrt{٦}}{٤٣}$$

$$\therefore ك-م + و + ن = ٧٧٠ - ١٩٦ + ٦ + ٤٣ = ٦٢٣$$

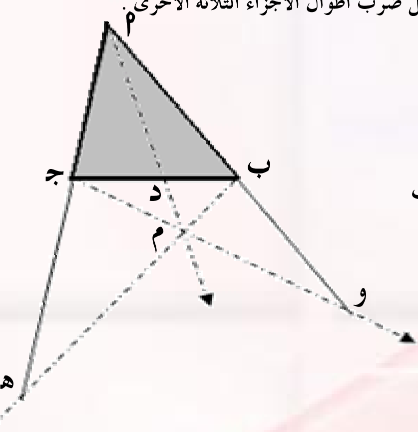
ملاحظة :

نظرية شيفا

إذا رسمت من رؤوس أي مثلث إلى أضلاعه المقابلة ثلاثة أشعة متقاطعة في نقطة واحدة بحيث تقسم كل ضلع من أضلاع المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزأين فإن حاصل ضرب أطوال ثلاثة أجزاء غير متتالية ومأخوذة في ترتيب دوري واحد يساوي حاصل ضرب أطوال الأجزاء الثلاثة الأخرى.



ب د × جـ هـ × ا و = د جـ × هـ ا × و ب



٦٧ أ، ب عددان تخيليان بحيث إذا كان أ^{٢} + ب^{٢} = ٥ ، أ^{٣} + ب^{٣} = ٧ ، فإن أ + ب ∈ ح ، أكبر قيمة ممكنة للمقدار الحقيقي أ + ب = $\frac{م + \sqrt{ن}}{٢}$ ، حيث م ، ن ∈ ص ، أوجد قيمة ن .

مسابقات ولاية ويسكنسون الأمريكية للمدارس الثانوية لقاء ابريل ٢٠٠٩ – برعاية جامعة ويسكنسون

University of Wisconsin –Whitewater -High School Mathematics Meet April ٢٠٠٩

الحل

نفرض أن : س = أ + ب ، ص = أ . ب

∴ س^{٢} – ٢ ص = (أ + ب)^{٢} – ٢ أ . ب = أ^{٢} + ٢ أ ب + ب^{٢} – ٢ أ . ب = أ^{٢} + ب^{٢}

∵ أ^{٢} + ب^{٢} = ٥

∴ س^{٢} – ٢ ص = ٥

∴ ٢ ص = س^{٢} – ٥

وكذلك :

س^{٣} –٣ص س = (أ + ب)^{٣} – ٣ أ . ب (أ + ب)

= أ^{٣} + ٣ أ ب^{٢} + ٣ أ^{٢} ب + ب^{٣} – ٣ أ ب^{٢} – ٣ أ^{٢} ب

= أ^{٣} + ب^{٣}

∵ أ^{٣} + ب^{٣} = ٧

∴ س^{٣} –٣ص س = ٧ بالضرب × ٢

∴ ١٤ = ٢س^{٣} –٣ (٢ص) س

∴ ١٤ = ٢س^{٣} –٣ (٢ص) س = ٢س^{٣} – ٣ (س^{٢} – ٥) س = ٢س^{٣} – ٣ س^{٣} + ١٥ س

∴ – س^{٣} + ١٥ س = ١٤

∴ س^{٣} – ١٥ س + ١٤ = ٠

∴ س^{٣} – ١ – ١٥ س + ١٤ + ١ = ٠

∴ (س^{٣} – ١) – ١٥ س + ١٥ = ٠

∴ (س^{٣} – ١) – (١٥ س – ١٥) = ٠

∴ (س – ١)(س^{٢} + س + ١) – ١٥(س – ١) = ٠

∴ (س – ١)[(س^{٢} + س + ١) – ١٥] = ٠

∴ (س – ١)(س^{٢} + س – ١٤) = ٠

∴ س = ١

باستخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية من الدرجة الثانية في مجهول واحد: س =

$$\frac{-١ \pm \sqrt{١ + ٤ \times ١٤}}{٢} = \frac{-١ \pm \sqrt{٥٧}}{٢}$$

∴ أكبر قيمة ممكنة للمقدار الحقيقي أ + ب = $\frac{-١ + \sqrt{٥٧}}{٢}$

∴ $\frac{-١ + \sqrt{٥٧}}{٢} = \frac{م + \sqrt{ن}}{٢}$

∴ ن = ٥٧

٦٨

أوجد قيمة س التي تحقق العلاقة : $٢٠^{٢٠٠٩} = ١٠^{٢٠٠٠} \,.\, ٤٠^{٩} \,.\, ٢^{\text{س}}$

مسابقات ولاية ويسكنسون الأمريكية للمدارس المتوسطة لقاء ابريل ٢٠٠٩ – برعاية جامعة ويسكنسون

University of Wisconsin –Whitewater -Middle School Mathematics Meet April ٢٠٠٩



يمكن كتابة المعادلة المعطاة على الصورة :

$$(٥ \times ٤)^{٢٠٠٩} = (٥ \times ٢)^{٢٠٠٠} \times (٥ \times ٨)^{٩} \times ٢^{\text{س}}$$

$$(٥ \times ٢^{٢})^{٢٠٠٩} = (٥ \times ٢)^{٢٠٠٠} \times (٥ \times ٢^{٣})^{٩} \times ٢^{\text{س}}$$

$$٥^{٢٠٠٩} \times ٢^{٢٠٠٩ \times ٢} = ٥^{٢٠٠٠} \times ٢^{٢٠٠٠} \times ٥^{٩} \times ٢^{٣ \times ٩} \times ٢^{\text{س}}$$

$$٥^{٢٠٠٩} \times ٢^{٤٠١٨} = ٥^{٢٠٠٠} \times ٢^{٢٠٠٠} \times ٥^{٩} \times ٢^{٢٧} \times ٢^{\text{س}}$$

$$٥^{٢٠٠٩} \times ٢^{٤٠١٨} = ٥^{٢٠٠٩} \times ٢^{٢٠٢٧ + \text{س}}$$

بالقسمة على $٥^{٢٠٠٩}$

$$\therefore ٢^{٤٠١٨} = ٢^{٢٠٢٧ + \text{س}}$$

$$\therefore ٢٠٢٧ + \text{س} = ٤٠١٨$$

$$\therefore \text{س} = ٤٠١٨ - ٢٠٢٧$$

$$\therefore \text{س} = ١٩٩١$$

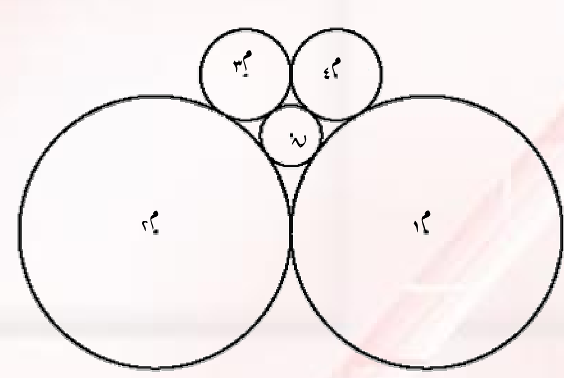
٦٩

على الشكل : (م١، ٣) ، (م٢،٣) ، (م٣، ١) ، (م٤،١)

أربع دوائر متماسة ، رسمت الدائرة (ن ، نق) بحيث

تمس الدوائر الأربعة

أوجد نق



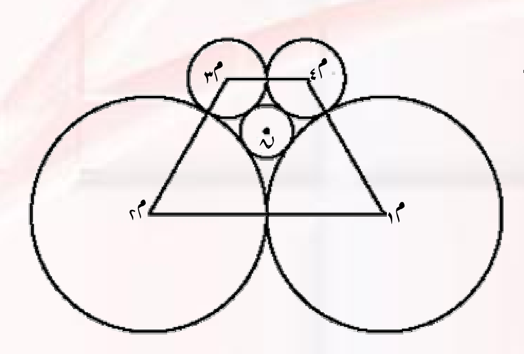
المسابقة العامة الأمريكية لإكتشاف المواهب – التصفية الثانية – ٢٠٠٨–٢٠٠٩

USA Mathematical Talant Search – Round ٢ – Academic Year ٢٠٠٨–٢٠٠٩

الحل

نصل : م١ م٢ ، م٢ م٣ ، م٣ م٤ ، م٤ م١

∴ الشكل م١ م٢ م٣ م٤ شبه منحرف متطابق الضلعين فيه :–



|م٣ م٤| = ١ + ١ = ٢سم

|م١ م٢| = ٣ + ٣ = ٦ سم

|م١ م٤| = |م٢ م٣| = ٣ + ١ = ٤ سم

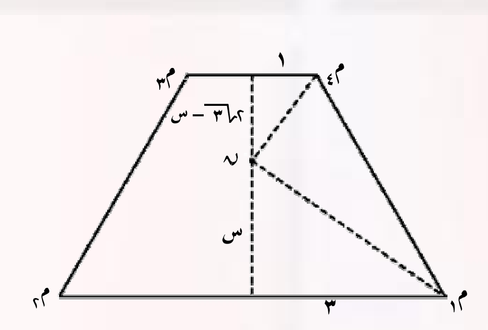
نسقط من م٤ عمود على م١ م٢ ينتج مثلث قائم طول وتره ٤ سم ، وقاعدته ٢ سم

∴ ارتفاع شبه المنحرف = $\sqrt{١٦ - ٤}$ = $\sqrt{١٢}$ = ٢$\sqrt{٣}$

نصل : م٤ ن ، م١ ن

نفرض أن طول العمود من ن إلى م١ م٢ = س

∴ طول العمود من ن إلى م٣ م٤ = ٢$\sqrt{٣}$ – س



باستخدام نظرية فيثاغورث

|م٤ ن| = $\sqrt{١ + (٢\sqrt{٣} - س)^{٢}}$

|م١ ن| = $\sqrt{٩ + س^{٢}}$

∴ م٤ ن خط المركزين للدائرتين (م٤،١) ، (ن ، نق)

$$\therefore |م_٤ ن| = ١ + نو$$

$$\therefore نو = |م_٤ ن| - ١$$

∵ م١ ن خط المركزين للدائرتين (م١، ٣) ، (ن ، نو)

$$\therefore |م_١ ن| = ٣ + نو$$

$$\therefore نو = |م_١ ن| - ٣$$

$$\therefore |م_٤ ن| - ١ = |م_١ ن| - ٣$$

$$\therefore |م_٤ ن| + ٢ = |م_١ ن|$$

$$\therefore \sqrt{١ + (٢\sqrt{٣} - س)^{٢}} + ٢ = \sqrt{٩ + س^{٢}}$$

بالتربيع

$$\therefore ١ + (٢\sqrt{٣} - س)^{٢} + ٤\sqrt{١ + (٢\sqrt{٣} - س)^{٢}} + ٤ = ٩ + س^{٢}$$

$$\therefore ١ + ١٢ - ٤\sqrt{٣}\,س + س^{٢} + ٤\sqrt{١ + (٢\sqrt{٣} - س)^{٢}} + ٤ = ٩ + س^{٢}$$

$$\therefore ١٧ - ٤\sqrt{٣}\,س + ٤\sqrt{١ + (٢\sqrt{٣} - س)^{٢}} = ٩$$

$$\therefore ٤\sqrt{١ + (٢\sqrt{٣} - س)^{٢}} = ٤\sqrt{٣}\,س - ٨$$

بالقسمة على ٤

$$\therefore \sqrt{١ + (٢\sqrt{٣} - س)^{٢}} = \sqrt{٣}\,س - ٢$$

بالتربيع

$$\therefore ١ + (٢\sqrt{٣} - س)^{٢} = ٣\,س^{٢} - ٤\sqrt{٣}\,س + ٤$$

$$\therefore ١ + ١٢ - ٤\sqrt{٣}\,س + س^{٢} = ٣\,س^{٢} - ٤\sqrt{٣}\,س + ٤$$

∴ $١٣ + س^{٢} = ٣ س^{٢} + ٤$

∴ $٢ س^{٢} = ٩$

∴ $س^{٢} = \frac{٩}{٢}$

∴ $س = \frac{٣}{\sqrt{٢}}$

∴ $|م، ن| = \sqrt{٩ + \frac{٩}{٢}} = \sqrt{\frac{٢٧}{٢}} = ٣\sqrt{\frac{٣}{٢}}$

∴ $نق = |م، ن| - ٣$

∴ $نق = ٣\sqrt{\frac{٣}{٢}} - ٣$

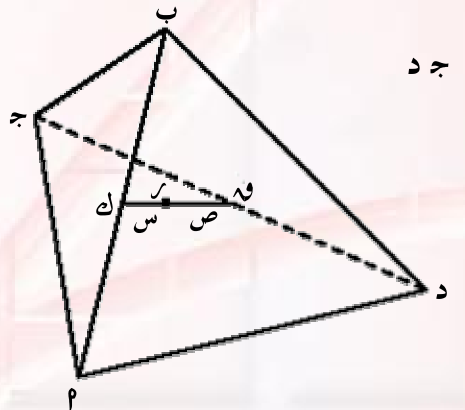
∴ $نق = ٣\left(\frac{\sqrt{٦}}{٢} - ١\right)$ سم

٧٠ إذا كانت النقطة ر تقع داخل الهرم الثلاثي المنتظم ٩ ب جـ د بحيث | ر ٩ | = | ر ب | = $\sqrt{١١}$ ، | ر جـ | = | ر د | = $\sqrt{١٧}$. فأوجد طول حرف الهرم .

المسابقة العامة الأمريكية لإكتشاف المواهب – التصفية الأولى – ٢٠٠٨-٢٠٠٩

USA Mathematical Talant Search – Round ١ – Academic Year ٢٠٠٨-٢٠٠٩

الحل



نفرض أن : ك منتصف الحرف ٩ ب ، هـ منتصف الحرف جـ د

نفرض أن : طول حرف الهرم = ٢ع

∴ ٩ ك = ك ب = د هـ = هـ جـ = ع

في △ ٩ جـ د المتطابق الأضلاع

| ٩ هـ | = $\sqrt{٤ع^٢ - ع^٢} = ع\sqrt{٣}$

في △ ٩ ك هـ ∵ ∠ ٩ ك هـ = ٩٠°

∴ | هـ ك | = $\sqrt{٣ع^٢ - ع^٢} = ع\sqrt{٢}$

نفرض أن : | ك ر | = س ، | هـ ر | = ص

باستخدام نظرية فيثاغورث على △ △ ٩ ك ر ، جـ ر هـ القائما الزاوية

∴ $س^٢ + ع^٢ = ١١$ ---------------------- ١

، $ص^٢ + ع^٢ = ١٧$ ---------------------- ٢

، س + ص = ع $\sqrt{٢}$ ---------------------- ٣

بالتعويض من ٣ في ٢

∴ $(ع\sqrt{٢} - س)^٢ + ع^٢ = ١٧$

∴ $٢ع^٢ - ٢\sqrt{٢}$ ع س + $س^٢ + ع^٢ = ١٧$

بالتعويض من ١

∴ ٢ح^٢ − ٢ $\sqrt{٢}$ ح س + ١١ = ١٧

∴ ٢ح^٢ − ٢ $\sqrt{٢}$ ح س = ٦

∴ ح^٢ − $\sqrt{٢}$ ح س = ٣

∴ ح^٢ − ٣ = $\sqrt{٢}$ ح س

$$\therefore \text{س} = \frac{\text{ح}^{٢} - ٣}{\text{ح}\sqrt{٢}}$$

بالتعويض في ١

$$\therefore \left(\frac{\text{ح}^{٢} - ٣}{\text{ح}\sqrt{٢}}\right)^{٢} + \text{ح}^{٢} = ١١$$

$$\therefore \frac{\text{ح}^{٤} - ٦\text{ح}^{٢} + ٩}{٢\text{ح}^{٢}} + \text{ح}^{٢} = ١١$$

بالضرب في ٢ح^٢

∴ ح^٤ − ٦ ح^٢ + ٩ + ٢ ح^٤ = ٢٢ ح^٢

∴ ح^٤ − ٦ ح^٢ + ٩ + ٢ ح^٤ = ٢٢ ح^٢

∴ ٣ ح^٤ − ٢٨ ح^٢ + ٩ = ٠

∴ (٣ ح^٢ − ١) (ح^٢ − ٩) = ٠

∴ ح^٢ = ٩

∴ ح = ٣

∴ طول حرف الهرم = ٢ح = ٢ × ٣ = ٦



تم بحمد الله